ESCUELA MATEMÁTICA DE AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE
EMALCA-COLOMBIA 2014

MÉTODOS ALGEBRAICOS EN SISTEMAS DINÁMICOS

Primitivo B. Acosta-Humánez

BARRANQUILLA, COLOMBIA, 06 Al 17 de OCTUBRE DE 2014

ESCUELA MATEMÁTICA DE AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE
EMALCA-COLOMBIA 2014

MÉTODOS ALGEBRAICOS EN SISTEMAS DINÁMICOS

Primitivo B. Acosta-Humánez

Universidad del Atlántico

email: primi@intelectual.co

BARRANQUILLA, COLOMBIA, 06 AL 17 de OCTUBRE DE 2014

ESCUELA MATEMÁTICA DE AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE
EMALCA-COLOMBIA 2014

La Escuela Matemática de Ameérica Latina y el Caribe. EMALCA-Colombia 2014 forma parte de un programa de Escuelas creado por la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) que cuenta con la colaboración del Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA), y se realiza bajo el auspicio de la Universidad del Atlántico, la Corporación Escuela de Matemática del Caribe Colombiano, la Universidad Simón Bolívar (Barranquilla), la Sociedad Colombiana de Matemáticas y la Asociación Matemática Venezolana, Instituto Nacional de Ciencia e Tecnologia de Matematica-INCTMat (Brasil).

La ESCUELA MATEMÁTICA DE AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE. EMALCA-COLOMBIA 2014 recibió financiamiento del Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA), la Corporación Escuela de Matemática del Caribe Colombiano, el Fondo Nacional de Ciencia, y el Rectorado de la Universidad del Atlántico.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary (Secondary). 12H05, 34M15

Métodos Algebraicos en Sistemas Dinámicos
Primitivo B. Acosta-Humánez

Diseño y edición: Ediciones Universidad del Atlántico
Preprensa e impresión: Ediciones Universidad del Atlántico
Depósito legal
ISBN 978-958-8742-59-5
Barranquilla, Colombia
2014

... porque yo honraré a quienes me honran ...

1 Samuel 2, 30.

A mis amores terrenales:

Greisy Paola Morillo,
Angie Marcela Acosta Maldonado,
Sergio Gabriel Acosta Maldonado,
Victoria Acosta-Humánez Morillo.

A la memoria de mis maestros:

Jairo Antonio Charris C. (1939 – 2003),
Jesús Hernando Pérez A. (1944 - 2014).

AGRADECIMIENTOS

- A Dios porque todo lo que soy se lo debo él;
- a mi esposa Greisy y a mis hijos Angie, Sergio y Victoria por el amor que me dan cada día;
- y a la memoria de Jesús Hernando Pérez (Pelusa), maestro y amigo quién me motivó hacia el estudio de la Teoría de Galois Diferencial.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN ix

1 TEORÍA DE GALOIS CLÁSICA **1**
1.1 Sistemas, dominios y cuerpos numéricos 2
1.2 Generalidades de los grupos y subgrupos 10
1.3 Teoría de Galois sobre cuerpos numéricos 18
1.4 Ejercicios 28

2 TEORÍA DE PICARD-VESSIOT **29**
2.1 Teoría de Galois diferencial 30
2.2 Transformaciones en ecuaciones diferenciales 38
2.3 El algoritmo de Kovacic y la ecuación de Riemann 60
2.4 Ejercicios 75

3 SISTEMAS DINÁMICOS **77**
3.1 Campos vectoriales polinomiales 78
3.2 Sistemas Hamiltonianos 101
3.3 Ecuación de Schrödinger 125
3.4 Ejercicios 152

4 EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS 153

BIBLIOGRAFÍA 157

INTRODUCCIÓN

El estudio algebraico de los sistemas dinámicos ha sido un tema de interés desde hace varias décadas, sin embargo el uso de técnicas numéricas ha desplazado el interés por resolver de forma global ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias. En la actualidad, el obtener soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias se ha convertido en un tema de interés para distintas áreas y disciplinas.

Lo anterior es la motivación que me ha llevado a dar un curso en la EMALCA 2014 de Barranquilla, también a escribir este material, esperando que se cumplan los siguientes propósitos:

- Presentar a estudiantes no graduados temas complementarios a un curso común de ecuaciones diferenciales de nivel básico.
- Establecer un paralelo entre el álgebra de polinomios y el álgebra presente en ecuaciones diferenciales.
- Motivar a los estudiantes hacia el inicio en la investigación en la Teoría de Galois Diferencial y en sus aplicaciones a la integrabilidad de sistemas dinámicos.

En este material, motivado por el curso presentado en la EMALCA 2014 en Barranquilla, haremos una introducción a la Teoría de Galois

Diferencial y algunas aplicaciones en sistemas dinámicos a nivel de estudiantes de cuarto año del pregrado en Matemáticas (licenciatura en algunos paises).

Partiendo del caso clásico, el cual se debe a E. Galois, se estudia la resolubidad de la ecuación polinómica mediante operaciones aritméticas y radicales, estableciendo que un polinomio es resoluble (se pueden obtener las raices mediante esas operaciones) si el grupo de Galois de ese polinomio es un grupo resoluble. Análogo al caso clásico para polinomios E. Picard y E. Vessiot consideraron ecuaciones diferenciales lineales, de manera que la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales lineales es conocida también como teoría de Picard-Vessiot. Se parte del hecho que dada una ecuación diferencial de la forma

$$Y' = AY, \quad Y \in K^n, \quad a_{ij} \in K = K(x),$$

existe una matriz fundamental de soluciones U, por lo tanto al igual que en el caso clásico (como se observa por ejemplo en los polinomios de segundo y tercer grado) tendremos una ecuación que relaciona los coeficientes con las soluciones de la ecuación, es decir

$$U' = AU, \quad \det U \neq 0.$$

En este libro, el cual es el primer libro en castellano sobre este tema, se presentan algoritmos efectivos para resolver ecuaciones de segundo orden: *Algebrización Hamiltoniana*, *Algoritmo de Kovacic*, transformaciones entre sistemas, ecuaciones lineales y ecuaciones de Riccati. Finalmente se aplicarán estos elementos galoisianos para estudiar problemas en sistemas dinámicos (campos polinomiales en el plano) y física matemática (integrabilidad en mecánica clásica via sistemas hamiltonianos y en mecánica cuántica via ecuación de Schrödinger). El lector encontrará en este libro muchos ejemplos y ejercicios que él debe presentar para lograr una mayor comprensión del tema. Como se trata de un libro introductorio, en donde no se requiere conocimientos previos de teoría de Galois, solamente se requiere un curso básico de Álgebra abstracta (que incluya anillos y cuerpos con característica cero) y un primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, aún cuando en casos especiales consideraremos ecuaciones diferenciales parciales elementales.

Para comenzar se establecen las siguientes notaciones, las cuales serán útiles a lo largo del libro.

- El conjunto $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_+^*$ y $\mathbb{Z}_-^*$ son definidos como

  $$\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : \quad n \geq 0\}, \quad \mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z} : \quad n \leq 0\},$$

  $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{Z}^+, \quad \mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z}^-.$

- El cardinal del conjunto A se denotará por $\mathrm{Card}(A)$.

- El determinante de la matriz A se denotará por $\det A$.

- El conjunto de matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$ y determinante no nulo: el grupo general lineal sobre $\mathbb{C}$, el cual será denotado por $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

- En algunos casos la derivación $d/d\xi$ será denotada por ∂_ξ. Por ejemplo, las derivaciones $' = d/dx$ y $\dot{} = d/dt$ pueden ser denotadas por ∂_x y ∂_t respectivamente.

Me disculpo con los lectores que esperan que este material tenga la calidad de un libro de investigación, puesto que aún cuando aquí estén consignados resultados que he obtenido durante mi carrera científica, solo es la ampliación de las lecturas que hice en la EMALCA 2014 (tal como he mencionado antes). Es mi aspiración que estas notas sean el germen de un buen libro de investigación en un futuro no muy lejano, pero mientras esto sucede, éste será mi texto guia para los seminarios, cursos y conferencias que imparta en diferentes instituciones y eventos alrededor de los temas tratados aquí. Espero que mis colegas, estudiantes y personas interesadas en los métodos algebraicos en sistemas dinámicos puedan encontrar en estas notas un material de partida que les sea útil en futuras investigaciones.

Para finalizar, hemos agregado a la bibliografía las referencias [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26], las cuales fueron la base de las referencias que evidencian mis resultados de investigación en colaboración con otros colegas (más bien amigos) y son de lectura obligatoria para quienes quieren profundizar en los temas presentados en este material.

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE GALOIS CLÁSICA

En este capítulo haremos una breve introducción a la teoría de Galois para polinomios. Para iniciar podemos recordar que Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) demostró en 1829 que toda ecuación polinómica irreducible de grado n con coeficientes racionales tiene n raices. Ahora bien, Evariste Galois (1811 - 1832) demostró que estas raíces pueden calcularse a partir de los coeficientes de la ecuación polinómica y a partir de números racionales, utilizando las cuatro operaciones con éstos y las raíces de cualquier índice a condición de que la ecuación polinómica admita un grupo llamado grupo resoluble. Cuando Galois discutía sobre las raíces de una ecuación, él estaba pensando en los números complejos. Más tarde algunos algebristas consideraron a $\mathbb{C}$ como cuerpo y por ende estudiaron subcuerpos de $\mathbb{C}$. Naturalmente se vieron conducidos a considerar a $\mathbb{C}$ como cuerpo algebráicamente cerrado, véase [15].

En la primera parte de este capítulo se presentará un resumen de sistemas numéricos, dominios numéricos y cuerpos numéricos, lo cual no requiere conocimiento previo de álgebra abstracta. La segunda parte corresponde a un repaso de teoría de grupos y la tercera parte es la presentación de la teoría de Galois sobre cuerpos numéricos. Este capítulo está basado en [18].

1.1 Sistemas, dominios y cuerpos numéricos

La teoría de los polinomios sobre los dominios y cuerpos numéricos es el corazón del álgebra clásica. Pensamos que considerar estos casos especiales, particularmente ricos, puede ser una excelente motivación para el estudio de sus contrapartes abstractas. Las analogías entre ambos casos pueden ser, además, de gran ayuda para la comprensión de estas últimas.

Iniciamos considerando algunas estructuras que se generan naturalmente dentro de los números complejos: *sistemas, dominios y cuerpos numéricos.*

Si $S \subseteq \mathbb{C}$ es tal que

i. $0, 1 \in S$,

ii. Dados $a, b \in S$, también $a + b$ y $ab \in S$,

se dice que $(S, +, \cdot)$ es un *sistema numérico*. Por ejemplo, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ *es un sistema numérico.* Por otra parte, si $(S, +, \cdot)$ es un sistema numérico entonces $0, 1 \in S$, y si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \in S$, (*ii*) implica que también $n + 1 \in S$. Luego S es inductivo, así que $\mathbb{N} \subseteq S$; es decir, *todo sistema numérico contiene los números naturales.* Otros sistemas numéricos son $(\mathbb{R}_+, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Q}_+, +, \cdot)$, donde $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$.

Si $(S, +, \cdot)$ es un sistema numérico tal que

iii. $-S = \{-a : a \in S\} \subseteq S$,

así que $-S = S$, se dice que $(S, +, \cdot)$ es un sistema *aditivamente simétrico*, o un *dominio numérico*, o, simplemente, que es un *dominio.* Un dominio es entonces *un sistema numérico que contiene los inversos aditivos de sus elementos.* Es claro, por ejemplo que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un *dominio*, y que si $(S, +, \cdot)$ es un dominio entonces $\mathbb{Z} \subseteq S$ (pues, como $\mathbb{N} \subseteq S$, también $(-\mathbb{N}) \subseteq S$) así que *todo dominio contiene los enteros.* Un dominio interesante es, como veremos más adelante, $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$, denominado el *dominio de los enteros de Gauss*, el cual no está exento de importancia.

Si $(K,+,\cdot)$ es un dominio y $K^* = K \setminus \{0\}$ es tal que

$$(K^*)^{-1} = \{a^{-1} : a \in K^*\} \subseteq K^*,$$

o sea, que $(K^*)^{-1} = K^*$, se dice que $(K,+,\cdot)$ es un *dominio multiplicativamente simétrico* , que es un *cuerpo numérico* o, simplemente, que es un *cuerpo*. Por ejemplo $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ son cuerpos, y si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo, entonces $\mathbb{Q} \subseteq K$. En efecto, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq K^*$, así que si $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, entonces $b^{-1} \in K$, y, en virtud de (ii) , también $a/b = ab^{-1} \in K$. Un *cuerpo* es entonces *un dominio que contiene, junto con sus elementos no nulos, los inversos multiplicativos de estos*. Como es claro, el dominio $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, no es un cuerpo.

Si K, L son cuerpos numéricos y $K \subseteq L$, se dice que K es un *subcuerpo* de L o que L es una *extensión* de K. En vista de lo anterior, *todo cuerpo es un subcuerpo de* $\mathbb{C}$ *y una extensión de* $\mathbb{Q}$. Es claro, por ejemplo, que

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \tag{1.1}$$

es un cuerpo numérico, el cual es un subcuerpo de $\mathbb{R}$, mientras que

$$\mathbb{Q}[i] := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q},\ i^2 = -1\} \tag{1.2}$$

es también un cuerpo que extiende propiamente a $\mathbb{Q}$ pero no es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ (basta observar que $i \in \mathbb{Q}[i]$). Por el contrario, el conjunto

$$Q := \{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \tag{1.3}$$

no es un cuerpo, pues el producto no es cerrado, mientras que

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\right] := \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\} \tag{1.4}$$

sí lo es. Nótese que

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\} \tag{1.5}$$

Teorema 1.1. *Si* $(S,+,\cdot)$ *es un dominio, existe un cuerpo* $\left(\widehat{S},+,\cdot\right)$ *tal que*

1. $S \subseteq \widehat{S}$,

2. *Si* K *es un cuerpo y* $S \subseteq K$*, entonces* $\widehat{S} \subseteq K$.

*Demostración***.** Como se verifica inmediatamente, si $S^* = S \setminus \{0\}$, entonces

$$\widehat{S} := \{a/b : a \in S, b \in S^*\} \tag{1.6}$$

es un cuerpo que satisface (1) y (2) . □

Definición 1.1. Si $(S, +, \cdot)$ es un dominio, se dice que $\left(\widehat{S}, +, \cdot\right)$ es el *cuerpo de cocientes* de $(S, +, \cdot)$.

Nota 1.1. Si $(S, +, \cdot)$ es un sistema numérico, siempre existe un dominio numérico $\left(\widetilde{S}, +, \cdot\right)$ tal que

1. $S \subseteq \widetilde{S}$,
2. Si $(S', +, \cdot)$ es un dominio numérico y $S \subseteq S'$, entonces $\widetilde{S} \subseteq S'$.

Basta, en efecto, tomar $\widetilde{S} = S \cup (-S)$. Se dice que $\widetilde{S}$ es el *dominio de saldos* o el *dominio de activos y pasivos de* S (este lenguaje proviene de la contabilidad, oficio en el cual se originó el concepto). Nótese que $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}$ y que $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}$. Si S es ya un dominio, es claro que $\widetilde{S} = S$. Y si S es un cuerpo, entonces $\widehat{S} = S$.
Sean $(S, +, \cdot)$ un dominio numérico y $x \notin \mathbb{C}$ un objeto fijo. El conjunto de las *sumas "formales"*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{1.7}$$

tales que $a_k \in S$ y para algún $m \geq 0$, $a_k = 0$ para todo $k \geq m$, así que la suma en (1.7) es realmente finita), se denomina el *sistema de los polinomios sobre* S *en la indeterminada* x y se denota con $S[x]$. *Se entiende que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

si y sólo si $a_k = b_k$ *para todo* $k \geq 0$.

A pesar de la notación funcional utilizada, $f(x) \in S[x]$ no es, en principio, una función (nótese que x es un objeto fijo, no una variable). Sin embargo, $f(x)$ define de manera natural una función $f : S \longrightarrow S$, por

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k. \tag{1.8}$$

Nótese que la suma de la derecha en (1.8) es finita y define efectivamente un elemento de S. Aunque en el caso de los sistemas numéricos no es muy importante distinguir entre el polinomio $f(x)$ y la función f, es mejor hacerlo, así sea por las razones siguientes: en primer lugar, si $(K, +, \cdot)$ es otro dominio tal que $S \subseteq K$, también $S[x] \subseteq K[x]$, así que $f(x) \in K[x]$, y por lo tanto, $f(x)$ define también, de manera natural, una aplicación de K en sí mismo, por medio de (1.8), la cual se denotaría aún con f. Así la función f definida por $f(x)$ *no está unívocamente determinada.* Por otra parte, no se puede excluir, a priori, que exista otro polinomio $g(x) \in S[x]$, $g(x) \neq f(x)$, tal que $g(s) = f(s)$ para todo $s \in S$ (esto no se da en el caso de los polinomios sobre los sistemas numéricos, pero puede darse en el de los polinomios sobre *dominios finitos,* a los cuales extenderemos, en el futuro, la noción de polinomio).

Si $f(x)$ es como en (1.7) y $a_k = 0$ para $k > m$, es usual escribir

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m. \tag{1.9}$$

Nótese que esto sugiere que $x^0 = 1$ y $x^1 = x$, lo cual aceptaremos en lo que sigue, y no excluye que $a_k = 0$ para $k \leq m$. Definimos

$$0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \; a_k = 0 \text{ para todo } k, \tag{1.10}$$

y

$$1(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \; b_0 = 1, \; b_k = 0 \text{ para todo } k > 0, \tag{1.11}$$

así que, según (1.9),

$$0(x) = 0, \; 1(x) = 1 \tag{1.12}$$

lo cual identifica los polinomios $0\,(x)$ y $1\,(x)$, respectivamente, con los números 0 y 1. De hecho, S puede considerarse como un subconjunto de $S\,[x]$, identificando $a \in S$ con el polinomio $a + 0x + 0x^2 + \cdots$ ($a_0 = a$, $a_k = 0$ para todo $k > 0$). Para $f\,(x)$ como en (1.9), definimos

$$-f(x) = (-f)\,(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-a_k)\, x^k. \tag{1.13}$$

Es claro que $(-f)\,(x) \in S\,[x]$.

Si $f\,(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ y $g\,(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ están en $S\,[x]$, definimos también

$$f\,(x) + g\,(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)\, x^k. \tag{1.14}$$

Obsérvese que

$$f\,(x) + g\,(x) \in S\,[x], \tag{1.15}$$

pues si $a_k = 0$ para $k > m$ y $b_k = 0$ para $k > n$, entonces

$$a_k + b_k = 0,\ k > \max\{m, n\}. \tag{1.16}$$

Nótese también que

$$f\,(x) + 0\,(x) = f\,(x) + 0 = f\,(x) = 0 + f\,(x) = 0\,(x) + f\,(x). \tag{1.17}$$

Por otra parte,

$$f\,(x) + (-f)\,(x) = (-f)\,(x) + f\,(x) = 0\,(x). \tag{1.18}$$

También es obvio que

$$(f\,(x) + g\,(x)) + h\,(x) = f\,(x) + (g\,(x) + h\,(x)) \tag{1.19}$$

y que

$$f\,(x) + g\,(x) = g\,(x) + f\,(x). \tag{1.20}$$

Definamos ahora

$$f\,(x) \cdot g\,(x) = f\,(x)\, g\,(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{1.21}$$

donde

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i = \sum_{i+j=k} a_i b_j. \tag{1.22}$$

Nótese que si $i + j = k > m + n$ entonces $i > m$ o $j > n$, así que

$$c_k = 0, \; k > m + n; \; c_{m+n} = a_m b_n. \tag{1.23}$$

La segunda relación en (1.23) resulta de observar que si $i + j = m + n$ e $i < m$ entonces $j > n$, y si $j < n$ entonces $i > m$. Además, $i = m$ si y sólo si $j = n$. Entonces

$$f(x) \cdot g(x) \in S[x], \tag{1.24}$$

y, como es obvio,

$$f(x) \cdot 1(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) = 1 \cdot f(x) = 1(x) \cdot f(x). \tag{1.25}$$

Veamos que

$$(f(x) g(x)) h(x) = f(x) (g(x) h(x)). \tag{1.26}$$

Escribamos $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, $h(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, y supongamos que $f(x)(g(x) h(x)) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ y $(f(x) g(x)) h(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} l_k x^k$. Entonces

$$\begin{aligned} d_m &= \sum_{i=0}^{m} a_{m-i} \left(\sum_{j=0}^{i} b_{i-j} c_j \right) = \sum_{(i,j) \in T} a_{m-i} b_{i-j} c_j \\ &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=j}^{m} a_{m-i} b_{i-j} c_j = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{m-j} a_{m-j-k} b_k \right) c_j, \end{aligned}$$

donde $T = \{(i,j) : 0 \le i \le m, \, 0 \le j \le i\} = \{(i,j) : 0 \le j \le m, \, j \le i \le m\}$
y $k = i - j$, j fijo. Entonces, $d_m = l_m$, $m \ge 0$. Esto demuestra la afirmación.

Gráficamente, la región de sumación es el triángulo de vértices 0, m, (m, m). (Para cada $0 \leq i \leq m$, la suma es sobre el segmento vertical. Para cada $0 \leq j \leq m$, fijo, sobre el segmento horizontal).

Es también claro que

$$f(x) \cdot 0(x) = f(x) \cdot 0 = 0 = 0 \cdot f(x) = 0(x) \cdot f(x). \tag{1.27}$$

y que

$$\begin{aligned} f(x)(g(x) + h(x)) = & \quad f(x) g(x) + f(x) h(x), \\ (g(x) + h(x)) f(x) = & \quad g(x) f(x) + h(x) f(x). \end{aligned} \tag{1.28}$$

De (1.22) se deduce finalmente que

$$f(x) g(x) = g(x) f(x). \tag{1.29}$$

Sean $(S, +, \cdot)$ un dominio numérico, y $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in S[x]$. Entonces, existe $m \geq 0$ tal que $a_k = 0$ para todo $k > m$. Si $a_m \neq 0$, esto es si $f(x) \neq 0(x)$ se dice que $f(x)$ tiene *grado* m, o que es un *polinomio de grado* m. Se dice también que m es el *grado de* $f(x)$ y escribimos

$$\operatorname{grad}(f(x)) := m,$$

o también

$$\operatorname{grad}(f(x)) := \max\{k : a_k \neq 0\} \geq 0. \tag{1.30}$$

Convendremos en que

$$\operatorname{grad}(0(x)) := -\infty. \tag{1.31}$$

Esta convención es útil teniendo en cuenta que, como se acepta usualmente, $-\infty < a$ y $-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$

Teorema 1.2. *Si $(S, +, \cdot)$ es un dominio y $f(x), g(x) \in S[x]$, entonces*

$$\operatorname{grad}(f(x) + g(x)) \leq \max(\operatorname{grad}(f(x)), \operatorname{grad}(g(x))) \tag{1.32}$$

y

$$\operatorname{grad}(f(x) g(x)) = \operatorname{grad}(f(x)) + \operatorname{grad}(g(x)). \tag{1.33}$$

De (1.33) se deduce también que

$$\text{grad}(f(x)) \leq \text{grad}(f(x)\, g(x)) \tag{1.34}$$

cualquiera que sea $g(x) \in S[x]$, $g(x) \neq 0$. Es claro además que $\text{grad}(f(x)) = 0$ si y sólo si $f(x) = a \in S$, $a \neq 0$.

Definición 1.2. Sean $f(x), g(x) \in S[x]$. Se dice que $f(x)$ *divide a* $g(x)$ *en* $S[x]$, que $f(x)$ es un *divisor de* $g(x)$ *en* $S[x]$, o que $f(x)$ es un *factor de* $g(x)$ *en* $S[x]$, si $f(x) \neq 0$, y existe $h(x) \in S[x]$ tal que $g(x) = f(x)\, h(x)$. Se escribe $f(x) \mid g(x)$ en $S[x]$. Si $f(x) = 0$, o si $f(x)$ no es un divisor de $g(x)$, escribiremos $f(x) \nmid g(x)$.

Nótese que el escribir $f(x) \mid g(x)$ *asegura entonces que* $f(x) \neq 0$.

Sean $(S, +, \cdot)$ un dominio y $f(x), g(x), h(x) \in S[x]$. Si $f(x) \neq 0$ entonces $f(x) \mid 0$, y si $f(x) \mid g(x)$ y $g(x) \neq 0$ se tiene que $\text{grad}(f(x)) \leq \text{grad}(g(x))$. También

$$f(x) \mid f(x),\ f(x) \neq 0 \tag{1.35}$$

y

$$\textit{Si } f(x) \mid g(x) \textit{ y } g(x) \mid h(x), \textit{ entonces } f(x) \mid h(x). \tag{1.36}$$

Además,

$$\textit{Si } f(x) \mid g(x) \textit{ y } g(x) \mid f(x), \textit{ entonces } f(x) = a g(x), \tag{1.37}$$

donde $a \in S$ *es tal que* $a^{-1} \in S$.

Si $(S, +, \cdot)$ un dominio y $a \in S$ es tal que $a^{-1} \in S$, se dice que a es *multiplicativamente invertible en* S o que a es una *unidad de* S. El elemento unidad 1 de S es una unidad de S. Sin embargo, *no toda unidad de* S *es un elemento unidad de* S. Por ejemplo, si $S = \mathbb{Z}$, $1, -1$ son (las únicas) unidades de S, y -1 no es un elemento unidad de S. Si $(S, +, \cdot)$ es un cuerpo, todo elemento no nulo de S es de hecho una unidad. Si $S = \mathbb{Z}[i]$ es el dominio de los enteros de Gauss, las únicas unidades de S son ± 1 y $\pm i$. Esto se deduce de observar que si $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ y $a + bi \neq 0$, el inverso de $a + bi$ en $\mathbb{C}$ es $(a - bi) / \left(a^2 + b^2\right)$, y como $a/a^2 + b^2$ y $b/a^2 + b^2$ deben ser enteros, si queremos que $(a + bi)^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$, esto sólo es posible cuando $a = \pm 1$ y $b = 0$ o $a = 0$ y $b = \pm 1$.

Definición 1.3. Se dice que un cuerpo numérico K es *algebraicamente cerrado*, o, simplemente, que es *cerrado*, si todo polinomio $f(x) \in K[x]$ con $\mathrm{grad}(f(x)) \geq 1$, tiene al menos una raíz $a \in K$.

Ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}$ son cerrados, pues $x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$, pero ninguna de sus raíces, $i, -i$, está en $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$.

Teorema 1.3. *Un cuerpo numérico K es algebraicamente cerrado si y sólo si todo polinomio $f(x) \in K[x]$, con $\mathrm{grad}(f(x)) = n \geq 1$, se escribe en la forma*

$$f(x) = a(x - a_1) \cdots (x - a_n), \tag{1.38}$$

donde $a \neq 0$ y los a_k, $k = 1, ..., n$, están en K.

Corolario 1.1. *Si K es algebraicamente cerrado y $f(x) \in K[x]$ tiene grado $n \geq 1$, existen $a'_1, ..., a'_m \in K$, $1 \leq m \leq n$, $a'_k \neq a'_j$ si $k \neq j$, y $\alpha_k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq \alpha_k \leq n$, $k = 1, ..., m$, tales que*

$$f(x) = a\left(x - a'_1\right)^{\alpha_1} \cdots \left(x - a'_m\right)^{\alpha_m}, \tag{1.39}$$

donde $a \in K$ y $a \neq 0$. Además,

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n. \tag{1.40}$$

1.2 Generalidades de los grupos y subgrupos

Dado un conjunto G, una aplicación

$$\begin{aligned} (\cdot) : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

se denomina una *ley de composición interna sobre G*. *Interna* se refiere al hecho de que *dados $a, b \in G$, $a \cdot b$ es también un elemento de G*. Otras notaciones usadas frecuentemente para $(\cdot)$ son: $(\circ)$, $(*)$, $(+)$. Se escribe entonces, respectivamente, $a \circ b$, $a * b$, $a + b$, en lugar de $a \cdot b$. La notación $(\cdot)$ se conoce como la *notación multiplicativa*. A su vez, $(+)$ es la *notación aditiva*. La notación multiplicativa $(\cdot)$ es la preferida para el desarrollo de la teoría general, aunque $(\circ)$ y $(*)$ son también comunes. La notación aditiva $(+)$ se reserva generalmente para casos especiales. *Cuando se usa la notación multiplicativa, es corriente escribir simplemente* ab *en lugar de* $a \cdot b$.

Definición 1.4. Un *grupo* $(G, \cdot)$ es un sistema formado por un conjunto G y una ley de composición interna $(\cdot)$ sobre G tal que

(i) $(ab)\,c = a\,(bc)$, *cualesquiera que sean* a, b, c en G.

(ii) *Existe* $e \in G$ *tal que* $ae = ea = a$ *para todo* $a \in G$.

(iii) *Para todo* $a \in G$ *existe* $a' \in G$ *tal que* $aa' = a'a = e$.

Si $(G, \cdot)$ es un grupo entonces $G \neq \varnothing$, pues $e \in G$. La propiedad (i) de la definición anterior se conoce como la *propiedad asociativa* o la *asociatividad* de $(\cdot)$. La (ii), como *la propiedad modulativa* de $(\cdot)$, y la (iii), como la *propiedad invertiva* de $(\cdot)$ *con respecto a* e. Como es claro, un grupo $(G, \cdot)$ tiene la siguiente propiedad:

(iv) *Cualesquiera que sean* a, $b \in G$, *también* $ab \in G$.

La propiedad (iv) se conoce como la *propiedad clausurativa* de $(\cdot)$.

Si un grupo $(G, \cdot)$ satisface la propiedad

(v) *Cualesquiera que sean* a, $b \in G$, $ab = ba$,

se dice que $(G, \cdot)$ es un *grupo conmutativo* o un *grupo abeliano*. La propiedad (v) se conoce como la *propiedad conmutativa* o la *conmutatividad de* $(\cdot)$.

Teorema 1.4. *En un grupo* $(G, \cdot)$ *existe un único* $e \in G$ *que satisface la propiedad* (ii) *de la definición* 1.4.

Definición 1.5. Se dice que e es el *elemento neutro* de $(G, \cdot)$.

Teorema 1.5. *Si* $(G, \cdot)$ *es un grupo y* a, $b \in G$ *son tales que* $ac = bc$ *para algún* $c \in G$, *entonces* $a = b$.

Análogamente se tiene que:

Si a, $b \in G$ y existe $c \in G$ tal que $ca = cb$, entonces $a = b$.

Corolario 1.2. *Si $(G, \cdot)$ es un grupo y $e' \in G$ es tal que $e'a = a$ para algún $a \in G$, entonces $e' = e$, el elemento neutro de G.*

De manera análoga, *si $ae' = a$ para algún $a \in G$, necesariamente $e' = e$.*

Corolario 1.3. *Si $(G, \cdot)$ es un grupo y $a \in G$, existe un y sólo un $a' \in G$ tal que $aa' = e$.*

Análogamente, existe un único $a' \in G$, tal que $a'a = e$. En total, existe un y sólo un a' en G tal que $aa' = a'a = e$.

Definición 1.6. Si $(G, \cdot)$ es un grupo y $a \in G$, el único $a' \in G$ tal que $a'a = aa' = e$ se denomina el *inverso* de a y se denota con a^{-1}.

Corolario 1.4. *Si $a \in G$, para que $a' = a^{-1}$ es necesario y suficiente que $aa' = e$ o que $a'a = e$.*

Teorema 1.6. *Si $(G, \cdot)$ es un grupo y a, $b \in G$, la ecuación $ax = b$ tiene la única solución $x = a^{-1}b$.*

De igual manera, $x = ba^{-1}$ *es la única solución de $xa = b$.*

Corolario 1.5. *Sean $(G, \cdot)$ un grupo, e su elemento neutro, $a, b \in G$. Entonces:*

1. $e^{-1} = e$
2. $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$
3. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Es también corriente, en este caso, considerar como ley de composición en $\mathcal{F}_0(X)$ la ley

$$f \cdot g := g \circ f \tag{1.41}$$

en lugar de la $g \circ f$. Como es natural, escribiremos $fg = f \cdot g$. El producto $(\cdot)$ hace más cómodo el cálculo de $g \circ f(k)$, como lo muestra el siguiente diagrama:

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & ... & k & ... & n \\ & & \downarrow & & \\ f(1) & ... & f(k) & ... & f(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ... & f(k) & ... & n \\ & & \downarrow & & \\ g(1) & ... & g(f(k)) & ... & g(n) \end{pmatrix}$$

Así,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & & \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \\ & 3 & \end{pmatrix}.$$

Es usual escribir $\mathcal{S}_n = \mathcal{F}_0(\{1, 2, ..., n\})$ y denominar a $(\mathcal{S}_n, \cdot)$ el *grupo simétrico de n objetos.*

Definición 1.6. Si $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y $(\cdot)$ es una ley de composición interna sobre G (así que, dados $1 \leq i, j \leq n$, existe $1 \leq k \leq n$ tal que $a_i \cdot a_j = a_i a_j = a_k$), la matriz $[a_{ij}]_{n \times n}$, donde $a_{ij} = a_i a_j$, se denomina la *tabla de multiplicación* de $(G, \cdot)$.

Si $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ es un grupo y convenimos en que $a_1 = e$ es el elemento neutro, entonces $a_{1j} = a_1 a_j = a_j$ y $a_{i1} = a_i a_1 = a_i$, $i, j = 1, 2, ..., n$; es decir, tanto la primera fila como la primera columna de $[a_{ij}]_{n \times n}$ es $(a_1, a_2, ..., a_n)$. De hecho, cualquier fila de $[a_{ij}]_{n \times n}$ contiene todos los elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ en algún orden. Esto es consecuencia del hecho de que para cada i, fijo, la ecuación $a_i x = a_j$, $j = 1, 2, ..., n$, siempre tiene solución. Como lo mismo es cierto de la ecuación $x a_j = a_i$, toda columna de $[a_{ij}]_{n \times n}$ contiene también todos los elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ en algún orden. Es decir, *si $[a_{ij}]_{n \times n}$ es la tabla de multiplicación de un grupo finito, toda fila y toda columna de $[a_{ij}]_{n \times n}$ contiene todos los elementos de G, y es fácil ver que si una tabla de multiplicación asociativa satisface tal propiedad, ésta es necesariamente la tabla de multiplicación de un grupo.* Las tablas de multiplicación de grupos con n elementos deben entonces buscarse entre las, matrices $[a_{ij}]_{n \times n}$ que contienen exactamente los mismos elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ en cada fila y cada columna (en algún orden). La asociatividad, sin embargo, no se puede deducir fácilmente de la tabla.

Así, para un conjunto con un único elemento e, la única tabla posible es $[e]$, que es la tabla de un grupo. Para uno con dos elementos, $G = \{e, a\}$, la única tabla posible es

$$A = \begin{bmatrix} e & a \\ a & e \end{bmatrix}, \tag{1.42}$$

y es la tabla de un grupo (pues es obviamente asociativa). Para un conjunto con tres elementos, $G = \{e, a, b\}$, es también claro que una sola tabla es posible:

$$A = \begin{bmatrix} e & a & b \\ a & b & e \\ b & e & a \end{bmatrix}, \tag{1.43}$$

la cual es efectivamente la tabla de un grupo. Nótese que la alternativa

$$A' = \begin{bmatrix} e & a & b \\ a & e & \\ b & & \end{bmatrix}, \tag{1.44}$$

es inconducente: necesariamente sería $a_{23} = b$, que es absurdo.

Definición 1.7. Sea $(G, \cdot)$ un grupo cuyo elemento neutro es e. Se dice que un subconjunto H de G es un *subgrupo* de G si H tiene las tres propiedades siguientes:

(i) $e \in H$.

(ii) Si $a, b \in H$ entonces $ab \in H$.

(iii) Si $a \in H$ entonces $a^{-1} \in H$.

Definición 1.8. Se dice que un grupo $(G, \cdot)$ es *cíclico* si $G = [a]$ para algún $a \in G$. Es decir, si G coincide con el subgrupo cíclico generado por alguno de sus elementos.

Teorema 1.7. *Todo grupo cíclico es abeliano.*

Definición 1.9. Sean $(G, \cdot)$ un grupo, $a \in G$. Se dice que a tiene *orden finito*, o que *a es de orden finito*, si existe $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, tal que $a^m = e$. En tal caso

$$\circ(a) := \text{mín}\{m > 0 : a^m = e\} \tag{1.45}$$

se denomina el orden de a.

Teorema 1.8. *Un elemento a de un grupo $(G,\cdot)$ tiene orden finito si y sólo si*

$$[a] = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.46}$$

Si además $m = \circ(a)$, entonces

$$[a] = \{a^n : 0 \leq n < m\}, \tag{1.47}$$

y para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$a^n = a^{r(n,m)} \tag{1.48}$$

donde $r(n,m)$ es el resto de dividir n por m.

Definición 1.10. Si G es un grupo finito, el orden $\circ(G)$ de G es el número de sus elementos. Si H es un subgrupo finito de G, $\circ(H)$, *el orden de H*, es también el número de sus elementos.

Si $(G,\cdot)$ es un grupo, H es un subgrupo de G y $a \in G$, escribiremos

$$aH = \{ax : x \in H\} \tag{1.49}$$

y

$$Ha = \{xa : x \in H\}. \tag{1.50}$$

Se dice que aH es *una clase lateral izquierda de H, una coclase a izquierda de H*, o *un cogrupo a izquierda de H*. Respectivamente, Ha es una *clase lateral, una coclase* o *un cogrupo a derecha de H*. Nótese que $eH = He = H$ y que $a \in aH \cap Ha$.

En general aH no es un subgrupo de G. De hecho, aH es un subgrupo de G si y sólo si $a \in H$, en cuyo caso $aH = H$. Esto es un corolario del siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Si H es un subgrupo de G y $a, b \in G$, $aH = bH$ si y sólo si $aH \cap bH \neq \varnothing$.*

Obsérvese ahora que $\varphi : aH \mapsto G$ dada por $\varphi(x) = \left(ba^{-1}\right)x$ es una aplicación inyectiva tal que $\varphi(aH) = bH$. En efecto, φ es claramente inyectiva, y si $c \in aH$, así que $c = ah$, $h \in H$, entonces $\varphi(c) = ba^{-1}ah = bh \in bH$, lo cual demuestra que $\varphi(aH) \subseteq bH$. Finalmente, si $d = bh' \in bH$ entonces $(ab^{-1})\, d = ah' \in aH$ y $\varphi\left(\left(ab^{-1}\right) d\right) = d$, lo cual establece que $\varphi(aH) = bH$. Se deduce que aH y bH tienen, cualesquiera que sean $a, b \in G$, el mismo número de elementos. En particular, aH y H tienen el mismo número de elementos:

$$\#(aH) = \circ(H) \tag{1.51}$$

para todo $a \in G$. Aquí $\#(aH)$ es el número de elementos de aH, con $\#(aH) = \infty$ si H es infinito.

Supóngase entonces que G es un grupo y que H es un subgrupo de G. El conjunto

$$G/H = \{aH : a \in G\} \tag{1.52}$$

de las clases laterales izquierdas de H es una *partición de* G, es decir, $aH \neq \varnothing$ para todo $a \in G$, $aH \cap bH = \varnothing$ si $aH \neq bH$, y

$$G = \bigcup_{a \in G} aH. \tag{1.53}$$

Además, *todos los conjuntos* aH *tienen el mismo número de elementos.* Esto y la relación (1.53) implican que *si* G *es finito y* C *es un subconjunto de* G *que tiene con cada coclase* aH *un único elemento en común, entonces*

$$\circ(G) = \sum_{a \in C} \#(aH) = \#(C) \cdot \circ(H). \tag{1.54}$$

Como es claro, $\#(C) = \#(G/H)$, así que

$$\#(G/H) = \circ(G) / \circ(H). \tag{1.55}$$

Como $\#(G/H)$, $\circ(H)$ y $\circ(G)$ son enteros positivos, se tiene entonces el siguiente teorema, uno de los más importantes de la teoría de los grupos.

Teorema 1.10 (*Lagrange*)**.** *Si* G *es un grupo finito y* H *es un subgrupo de* G*, entonces* $\circ(H)$ *divide* $\circ(G)$*.*

Corolario 1.7 (*Lagrange*)**.** *Si* G *es un grupo finito y* $a \in G$*, entonces* $\circ(a)$ *es finito y divide* $\circ(G)$*.*

Teorema 1.11. *Si un grupo G no tiene subgrupos propios, entonces G es un grupo cíclico finito; y si $\circ(G) = p > 1$, entonces p es un número primo.*

Teorema 1.12. *Si G es un grupo cíclico, todo subgrupo H de G también lo es.*

Definición 1.10. Se dice que un subgrupo H de $(G, \cdot)$ es un *subgrupo normal* de G si $aH = Ha$ para todo $a \in G$.

Es decir, H es normal si y sólo si toda clase lateral izquierda de H es igual a la correspondiente clase lateral derecha. Evidentemente G es un subgrupo normal de sí mismo. También $H = \{e\}$ es un subgrupo normal de G. Existen grupos G cuyos únicos subgrupos normales son $\{e\}$ y G.

Si $(G, \cdot)$ es abeliano, todo subgrupo H de G es normal. Si $n \geq 2$, el subgrupo $GL_n(\mathbb{R})$ de $GL_n(\mathbb{C})$ no es normal. Tampoco $GL_n(\mathbb{Q})$ es un subgrupo normal de $GL_n(\mathbb{R})$. Si $G = \mathcal{S}_3$ es el grupo simétrico de 3 objetos, $H = \{e, d, f\}$ es un subgrupo normal de G, pero $H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, b\}$ y $H_3 = \{e, c\}$ no lo son.

Definimos

$$aHa^{-1} := \{aha^{-1} \big| h \in H\}.$$

Teorema 1.13. *Sean $(G, \cdot)$ un grupo, H un subgrupo de G. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *H es un subgrupo normal de G.*
2. *$aH \subseteq Ha$ cualquiera que sea $a \in G$.*
3. *$aHa^{-1} \subseteq H$ para todo $a \in G$.*
4. *$H \subseteq aHa^{-1}$ cualquiera que sea $a \in G$.*
5. *$Ha \subseteq aH$ para todo $a \in G$.*

Definición 1.11. Si $(G, \cdot)$ es un grupo y H es un subgrupo de G, denotaremos con $[G : H]$, y lo denominaremos el *índice de H en G*, el número de clases laterales izquierdas de H en G:

$$[G : H] := \#\left(G/H\right).$$

$[G : H]= \infty$ si G/H es infinito.

Si G es un grupo y $A, B \subseteq G$, definimos

$$AB = A \cdot B := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

Teorema 1.14. *Si H es un subgrupo normal de $(G, \cdot)$, la ley de composición $(aH)(bH) = \{ahbh' : h, h' \in H\}$, es una ley de composición interna en G/H que hace de este conjunto un grupo, en el cual $H = eH$ es el elemento neutro y $a^{-1}H$ es el inverso de aH. Más aún,*

$$(aH)(bH) = (ab)H.$$

Definición 1.12. El conjunto G/H de las clases laterales izquierdas de un subgrupo normal H de G con la ley de composición interna

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

se denomina el *grupo cociente* de G por H.

Teorema 1.15 (*Cauchy*) **.** *Si G es un grupo abeliano finito y p es un primo que divide $\circ(G)$, existe $a \in G$ tal que $\circ(a) = p$, y G tendrá así un subgrupo de orden p.*

1.3 Teoría de Galois sobre cuerpos numéricos

Sea L una *extensión simple del cuerpo numérico K*, así que existe $\alpha \in L$ tal que $L = K[\alpha]$ y sea $p_{K,\alpha}(x)$ el polinomio mínimo con coeficientes en K que tenga a α como raíz. En general, $L = K[\beta]$ para infinitos $\beta \in L$. De hecho, $L = K[a\alpha]$ para todo $a \in K$, $a \neq 0$. Sin embargo, de $K \subseteq K[\beta] \subseteq K[\alpha]$ se deduce que $\mathrm{grad}(p_{K,\beta}(x))\ |\mathrm{grad}(p_{K,\alpha}(x))$ y de

$K \subseteq K[\alpha] \subseteq K[\beta]$ que grad$(p_{K,\beta}(x))$ =grad$(p_{K,\alpha}(x))$. Por lo tanto, si L es una extensión simple de K, podemos definir sin ambigüedad

$$[L;K] := \text{grad}(p_{K,\alpha}(x)), \tag{1.56}$$

donde $\alpha \in L$ es tal que $L = K[\alpha]$. Se dice que $[L;K]$ es *el grado de L sobre K*.

Esta observación implica que *si L es una extensión finita de K y M es una extensión finita de L entonces M es una extensión finita de K y*

$$[M;K] = [M;L][L;K]; \tag{1.57}$$

y, también, que *si M es una extensión finita de K y $K \subseteq L \subseteq M$ es una extensión intermedia, entonces L es una extensión finita de K, M es una extensión finita de L, $[L;K] \mid [M;K]$ y $[M;L] \mid [M;K]$*. Si existe $\alpha \in L$ el cual no es algebraico sobre K entonces $[L;K]$ no puede ser finito. Escribiremos $[L;K] = \infty$. Como es claro si $K(\alpha)$ denota el cuerpo de cocientes de $K[\alpha]$, α es trascendente sobre K si y sólo si $[K(\alpha);K] = \infty$.

Si K y K' son cuerpos numéricos, denotaremos con $\text{Hom}(K,K')$ al conjunto de las aplicaciones de K en K'tales que

$$1. \quad \sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b) \tag{1.58}$$
$$2. \quad \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b). \tag{1.59}$$

Se dice que σ es un *homomorfismo del cuerpo K en el cuerpo K'*. Si $K = K'$, se dice que $\text{Hom}(K,K')$ es el *sistema de los endomorfismos de K*. Como se verifica inmediatamente *si* $\sigma \in \text{Hom}(K,K')$ *entonces* $\sigma(0) = 0$, $\sigma(-a) = -\sigma(a)$, $\sigma(1) = 1$ y $\sigma(a^{-1}) = \sigma^{-1}(a)$. Esto último implica que σ es inyectiva, aunque no necesariamente sobreyectiva. Cuando σ es biyectiva, se dice que σ es un *isomorfismo de K sobre K'*.

Sea K un subcuerpo de los cuerpos L y L'. Diremos también que L y L' son extensiones de K y escribiremos L/K y L'/K. En tal caso $\text{Hom}(L/K, L'/K)$ denotará el conjunto de los homomorfismos de L en L' tales que $\sigma(a) = a$ para todo $a \in K$. A su vez, denotaremos con

$G(L/K)$ el subconjunto de $\mathrm{Hom}(L/K, L/K)$ de los endomorfismos biyectivos de L/K sobre L/K. Es fácil ver que $\mathrm{Hom}(L/K, L/K) = G(L/K)$ si $[L; K] < \infty$, pero esto puede no ser cierto si $[L; K] = \infty$.

Lema 1.1. *Sean K y K' campos numéricos, $\sigma : K \to K'$ un isomorfismo de campos $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in K[x]$ un polinomio irreducible, $\sigma(f)(x) = \sigma(a_n)x^n + \cdots + \sigma(a_0) \in K'[x]$. Sean α una raíz de $f(x)$ en alguna extensión de K, β una raíz de $\sigma(f)(x)$ en una de K'. Entonces $\sigma(f)(x)$ es irreducible sobre K' y existe un isomorfismo $\widehat{\sigma} \in \mathrm{Hom}(K[\alpha], K'[\beta])$ tal que $\widehat{\sigma} \mid_K = \sigma$ y que $\widehat{\sigma}(\alpha) = \beta$.*

Teorema 1.16. *Sean K y K' cuerpos numéricos, $\sigma : K \to K'$ un isomorfismo de cuerpos. Sean $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in K[x]$ un polinomio irreducible,$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ un conjunto completo de raíces de $f(x)$ en alguna extensión de K. Sea $\sigma(f)(x) = \sigma(a_n)x^n + \cdots + \sigma(a_0) \in K'[x]$. Entonces $\sigma(f)(x)$ es irreducible sobre K', y si $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ es un conjunto completo de raíces de $\sigma(f)(x)$ en una extensión de K', para todo $1 \leq m \leq n$ existe un isomorfismo $\widehat{\sigma} : K[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] \to K'[\beta_1, \ldots, \beta_m]$ con $\widehat{\sigma}(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Corolario 1.8. *Sean $f(x) \in K[x]$, irreducible, L el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre K. Sean α, β raíces de $f(x)$, $\sigma : K[\alpha] \to K[\beta]$ el isomorfismo tal que $\sigma \mid_K$ es la identidad de K y $\sigma(\alpha) = \beta$. Entonces σ se prolonga en un automorfismo $\widehat{\sigma}$ de L tal que $\widehat{\sigma} \mid_{K[\alpha]} = \sigma$.*

Definición 1.13. Sean K, L cuerpos numéricos y supóngase que L/K. El grupo $G(L/K)$ de los automorfismos de L tales que $\sigma \mid_K$ es la identidad i_K de K se denomina el *grupo de Galois de L/K*. Si $f(x) \in K[x]$ y L es el cuerpo de descomposición de $f(x)$, es usual escribir $G\{f(x)/K\}$ en lugar de $G(L/K)$ y denominarlo *el grupo de Galois de $f(x)$ sobre K*.

Teorema 1.17. *Sean K un cuerpo numérico, $f(x) \in K[x]$, irreducible, L el campo de descomposición de $f(x)$ sobre K. Si α y β son raices de $f(x)$ en L, existe $\sigma \in G(L/K)$ tal que $\sigma(\alpha) = \beta$.*

Teorema 1.18. *Sean L, K campos numéricos tales que $[L; K] < \infty$.*

Entonces

$$|G(L/K)| \leq [L; K] \tag{1.60}$$

Sean M/L y L/K extensiones. Es claro que

$$G(M/L) \subseteq G(M/K). \tag{1.61}$$

Teorema 1.19. *Considérense las extensiones M/L, L/K y M/K. La relación de equivalencia R sobre $G(M/K)$ definida por*

$$R = \{(\sigma, \rho) : \varphi(\sigma) = \varphi(\rho)\}, \tag{1.62}$$

donde $\varphi : G(M/K) \to \mathrm{Hom}(L/K, M/K)$ es la aplicación $\varphi(\sigma) = \sigma \mid_L$, es la relación de equivalencia a izquierda sobre $G(M/K)$ definida por $G(M/L)$. En particular,

$$G(M/K)/R = G(M/K)/G(M/L) \tag{1.63}$$

es la clase de los cogrupos a izquierda de $G(M/L)$ en $G(M/K)$, y la aplicación

$$\overline{\varphi} : G(M/K)/G(M/L) \to \mathrm{Hom}(L/K, M/K), \tag{1.64}$$

obtenida de φ por paso al cociente es inyectiva.

Teorema 1.20. *Sean M/L y L/K extensiones con $[M; K] < \infty$, $[L; K] < \infty$. Entonces*

$$[G(M/K); G(M/L)] \leq |\mathrm{Hom}(L/K, M/K)| \leq [L; K]. \tag{1.65}$$

Definición 1.14. Diremos que una extensión de cuerpos numéricos L/K es *una extensión de Galois*, si:

$$1. \quad [L; K] < \infty \tag{1.66}$$

$$2. \quad |G(L/K)| = [L; K]. \tag{1.67}$$

Toda extensión de Galois es entonces finita y, por lo tanto, algebraica.

Teorema 1.21. *Sea L/K de grado finito. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *L/K es de Galois.*

2. *L es el cuerpo de descomposición de un polinomio $f(x) \in K[x]$.*

3. *L es el cuerpo de descomposición de un polinomio irreducible $p(x) \in K[x]$.*

Definición 1.15. Sean L/K una extensión, H un subgrupo de $G(L/K)$. El conjunto $F(H)$ de los elementos $a \in L$ que quedan fijos bajo la acción de todo elemento de H, es decir, tales que $\sigma(a) = a$ para todo $\sigma \in H$, se denomina el campo fijo de H.

Definición 1.16. Sean L/K una extensión, $H \subseteq G(L/K))$, L/M, M/K extensiones intermedias. Si

$$H = G(L/F(H)), \tag{1.68}$$

se dice que H es un *subgrupo cerrado de* $G(L/K)$. Si

$$M = F(G(L/M)), \tag{1.69}$$

se dice que M es una *extensión cerrada de K en L*.

Si $K' = F(G(L/K))$, entonces

$$G(L/K) = G(L/K'). \tag{1.70}$$

Definición 1.17. Sea L/K una extensión. Si K mismo es una *extensión cerrada de K en L*, es decir, si

$$K = F(G(L/K)), \tag{1.71}$$

se dice que L/K es una *extensión normal*, o que L es una *extensión normal de K*.

Lema 1.2. Sean L una extensión algebraica de K y H un subgrupo finito de $G(L/K)$. Entonces

$$[L; F(H)] \leq |H|\,. \tag{1.72}$$

Corolario 1.9. *Si L es una extensión finita de K y K' es el campo fijo de $G(L/K)$, entonces L/K' es de Galois. Más aún ,*

$$|G(L/K)| = \left|G(L/K')\right| = [L;K'] \tag{1.73}$$

Corolario 1.10. *Si L/K es de grado finito y H es un subgrupo finito de $G(L/H)$, H es cerrado. Si $G(L/H)$ es finito, todos sus subgrupos son cerrados.*

Teorema 1.22. *Sea L/K una extensión de grado finito. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *L/K es de Galois.*
2. *L/K es normal.*

En lo que sigue, si $f(x) \in K[x]$, $K\{f(x)\}$ denotará su cuerpo de descomposición sobre K.

Definición 1.18. Sean L/K una extensión, M, con $K \subseteq M \subseteq L$, un cuerpo intermedio. Se dice que M es *estable* relativamente a L/K, si $\sigma(M) \subseteq M$ para todo $\sigma \in G(L/K)$.

Teorema 1.23. *Sean L/K una extensión de Galois, M, con $K \subseteq M \subseteq L$, un cuerpo intermedio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es estable relativamente a L/K.*
2. *$G(L/M) \triangleleft G(L/K)$*
3. *M/K es de Galois.*

En tales circunstancias, el grupo cociente $G(L/K)/G(L/M)$ es isomorfo a $G(M/K)$.

Corolario 1.11. *Si L/K es de Galois y M, con $K \subseteq M \subseteq L$, es un cuerpo intermedio, M/K es de Galois si y sólo si $G(L/M)$ es un subgrupo normal de $G(L/K)$, en cuyo caso*

$$G(L/K)/G(L/M) \approx G(M/K). \tag{1.74}$$

Teorema 1.24. *Sean $K \subseteq M \subseteq L$ y supóngase que L/M y M/K son de Galois. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes*:

1. *L/K es de Galois.*

2. *Si $\sigma \in G(M/K)$, existe $\widetilde{\sigma} \in G(L/K)$ tal que $\widetilde{\sigma}\mid_M = \sigma$.*

Sea L/K una extensión, $\mathcal{I}(L/K)$ el conjunto de los cuerpos intermedios $K \subseteq M \subseteq L$, $\mathcal{E}(L/K)$ el subconjunto de $\mathcal{I}(L/K)$ de los cuerpos estables bajo $G(L/K)$, $\mathcal{G}(L/K)$ el conjunto de todos los subgrupos H de $G(L/K)$, $\mathcal{N}(L/K)$ el subconjunto de $\mathcal{G}(L/K)$ de aquellos que son normales.

Teorema 1.25. *(Galois). Si L/K es de Galois, las aplicaciones*

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{G} : \mathcal{I}(L/K) \to \mathcal{G}(L/K), & \mathfrak{F} : \mathcal{G}(L/K) \to \mathcal{I}(L/K) \\ \qquad M \to G(L/M) & \qquad H \to F(H) \end{array} \tag{1.75}$$

son biyectivas e inversa una de la otra. Además

$$\mathfrak{F}(\mathcal{E}(L/K)) = \mathcal{N}(L/K), \quad \mathfrak{G}(\mathcal{N}(L/K)) = \mathcal{E}(L/K), \tag{1.76}$$

así que $\mathfrak{F}$ aplica biyectivamente cuerpos estables en subgrupos normales.

Sean N/K de grado finito, $K \subseteq L \subseteq N$ un cuerpo intermedio. La relación (1.72) asegura que

$$|\mathrm{Hom}(L/K, N/K)| \leq [L; K]. \tag{1.77}$$

Puede ser interesante anotar que la validez de esta relación puede establecerse sin recurrir a la simplicidad de L. En efecto, si $a \in L \setminus K$, podemos suponer por inducción que

$$|\mathrm{Hom}(L/K(a), N/K(a)| \leq [L; K(a)]; \tag{1.78}$$

y si $\psi : \mathrm{Hom}(L/K, N/K) \to \mathrm{Hom}(K(a)/K, N/K)$ es la aplicación de restricción, es fácil ver que siendo R la relación de equivalencia asociada a ψ, $\sigma \equiv \rho(R)$ si y sólo si $\sigma^{-1}\rho \in \mathrm{Hom}(L/K(a), N/K(a))$. Esto implica que

$$\begin{aligned} |\mathrm{Hom}(L/K, N/K)| &\leq |\mathrm{Hom}(K(a)/K, N/K)|\,|\mathrm{Hom}(L/K(a), N/K(a))| \\ &\leq [K(a); K][L; K(a)] = [L; K]. \end{aligned}$$

Teorema 1.26. *Sean N/K de grado finito, $K \subset L \subset M \subset N$ cuerpos intermedios. Entonces*

$$[G(N/L); G(N/M)] \leq [M; L]. \tag{1.79}$$

Si además N/K es de Galois, al anterior relación es una igualdad.

Teorema 1.27. *Si L/K es de grado finito, $H \subseteq J \subseteq G(L/K)$, subgrupos de $G(L/K)$ entonces*

$$[F(H); F(J)] = [J; H]. \tag{1.80}$$

Si $n \geq 1$ es un entero, el polinomio

$$\varphi_n(x) = \prod_{\omega \in P_n} (x - \xi), \tag{1.81}$$

donde P_n es el conjunto de las raíces primitivas n-ésimas de la unidad, se denomina el *n-ésimo polinomio ciclotómico.*

Si $\xi = e^{2\pi i/n}$, entonces

$$\varphi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \mathrm{mcd}(k,n)=1}} (x - \xi^k). \tag{1.82}$$

Esto implica que $\mathrm{grad}(\varphi_n(x)) = \phi(n)$, donde

$$\phi(n) = \#\{1 \leq k \leq n : \mathrm{mcd}(k,n) = 1\}, n \geq 1, \tag{1.83}$$

es la *función de Euler*. Si $\varphi_n(x) \in K[x]$, el cuerpo de descomposición sobre K del polinomio $\varphi_n(x)$ se denomina la *n-ésima extensión ciclotómica de K*. Evidentemente

$$K\{\varphi_n(x)\} = K[\xi^{k_1}, \xi^{k_2}, \ldots, \xi^{k_m}], \xi = e^{2\pi i/n}, \mathrm{mcd}(k_i, n) = 1, m = \phi(n). \tag{1.84}$$

Naturalmente ξ puede sustituirse por cualquier otra raíz primitiva n-ésima de la unidad. Es claro que

$$K\{\varphi_n(x)\} = K[\xi] = K\{x^n - 1\}. \tag{1.85}$$

Sea ahora

$$\mathcal{F} = \mathbb{Q}[\xi] = \mathbb{Q}\{x^n - 1\} \tag{1.86}$$

el cuerpo de descomposición de $x^n - 1$ sobre $\mathbb{Q}$, así que $\mathcal{F}/\mathbb{Q}$ es de Galois, de lo cual $F(G(\mathcal{F}/\mathbb{Q})) = \mathbb{Q}$. Por otra parte

$$\varphi_n(x) = b_m x^m + \cdots + b_0, \quad m = \phi(n), \tag{1.87}$$

donde

$$b_{m-k} = (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}, \quad 1 \leq i_k \leq \phi(n), \quad m = \phi(n), \tag{1.88}$$

y si $\sigma \in G(\mathcal{F}/\mathbb{Q})$, $\sigma(\xi)$ es una raíz primitiva i-ésima de la unidad si y sólo si ξ lo es. Esto implica que $\sigma(b_{m-k}) = b_{m-k}$, así que siendo $\mathcal{F}/\mathbb{Q}$ de Galois, necesariamente $b_{m-k} \in \mathbb{Q}$. Entonces , $\varphi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Obsérvese que entonces $\varphi_n(x) \in K[x]$ para todo cuerpo numérico K y todo $n \geq 1$.

Teorema 1.28. *Si $L = K\{\varphi_n(x)\} = K\{x^n - 1\}$ entonces $[L; K] \mid \phi(n)$ y $G(L/K)$ es isomorfo a un subgrupo del grupo $U(\mathbb{Z}_n)$ de las unidades de $\mathbb{Z}_n$ siendo entonces abeliano.*

En general $[L; K] < \phi(n)$. Tómese, por ejemplo, $n = 5$ y $K = \mathbb{R}$. Entonces $L = \mathbb{C}$ y $[L; K] = 2$, mientras que $\phi(5) = 4$.

Se observa que $\varphi_n(x)$ *es irreducible sobre* $\mathbb{Q}$*, de lo cual se deduce que*

$$\varphi_n(x) = p_{\mathbb{Q},\xi}(x)$$

cualquiera que sea la raíz primitiva n-ésima ξ de la unidad.

Si F es el cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^n - 1$ entonces $[F; \mathbb{Q}] = \phi(n)$. Es claro que $F = \mathbb{Q}\{\varphi_n(x)\}$ y que $G(F/\mathbb{Q}) = U(\mathbb{Z}_n)$. Si además n es primo, $G(F/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_{n-1}$, es así cíclico de orden $n-1$. Nótese que en este último caso, si n es primo y $L = K\{x^n - 1\}$, también $G(L/K)$ es cíclico.

Sea K un cuerpo numérico, $a \in K$, $a \neq 0$, $n \geq 1$ un entero. *Supongamos primero que K es n-primitivo*, o sea, que $K = K[\xi]$, donde ξ es una raíz primitiva n-ésima de la unidad. Si u, v son raíces de $x^n - a$ en $L = K\{x^n - a\}$, uv^{-1} es raíz de $x^n - 1$, y está por lo tanto en K, de lo cual $L = K[u]$, y si $\sigma \in G(L/K)$ entonces $\sigma(u) = \xi^k u$, $1 \leq k \leq n$, $\mathrm{mcd}(k, n) = 1$. Por lo tanto, si también $\rho \in G(L/K)$, $\rho(u) = \xi^j u$, $1 \leq j \leq n$, $\mathrm{mcd}(j, n) = 1$, de lo cual $\sigma\rho(u) = \xi^k \xi^j u = \xi^j \xi^k u = \rho\sigma(u)$ y $G(L/K)$ es abeliano. En total:

Teorema 1.29. *Sea K un campo numérico $a \in K$, $a \neq 0$, $n \geq 1$ un entero. Supóngase que K es n-primitivo y sea $L = K\{x^n - a\}$. Si u es cualquier raíz de $x^n - a$ en L, $G(L/K)$ es abeliano. Si n es primo y $x^n - a$ es irreducible sobre K, $G(L/K)$ es cíclico de orden n.*

Si K no es n-primitivo, los resultados anteriores son aún aplicables a $K[\xi]$ y a $L = K[\xi]\{x^n - a\}$, donde ξ es cualquier raiz primitiva n-ésima de la unidad.

Sean $m, n > 0$, primos relativos. Entonces $g(x) = \varphi_m(x)\varphi_n(x)$ y $f(x) = \varphi_{mn}(x)$ tienen, el mismo cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$. (Si $n \geq 1$, $\varphi_n(x)$ es el n-ésimo polinomio ciclotómico). Además $G\{\varphi_m(x)\}$ y $G\{\varphi_n(x)\}$ son ambos subgrupos de $G\{f(x)\}$. Además, $G\{f(x)\} \approx G\{\varphi_m(x)\} \times G\{\varphi_n(x)\}$. En efecto, si a es raíz de $\varphi_{mn}(x)$ (una raíz primitiva mn-ésima de la unidad), las a^{nk}, $1 \leq k \leq m$ y las a^{mj}, $1 \leq j \leq n$, son, respectivamente, raices distintas de $x^m - 1$ y $x^n - 1$, así que $\mathbb{Q}\{\varphi_m(x)\}$ y $\mathbb{Q}\{\varphi_n(x)\}$ son ambos subcuerpos de $\mathbb{Q}\{f(x)\}$, y lo mismo será cierto de $\mathbb{Q}\{g(x)\}$. Por otra parte, si b es raíz de $f(x)$, $b^m \in \mathbb{Q}\{\varphi_n(x)\}$ y $b^n \in \mathbb{Q}\{\varphi_m(x)\}$, de lo cual b^m, $b^n \in \mathbb{Q}\{g(x)\}$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ son tales que $\alpha m + \beta n = 1$, $b = (b^m)^\alpha (b^n)^\beta$ está también en $\mathbb{Q}\{g(x)\}$, así que $\mathbb{Q}\{f(x)\} = \mathbb{Q}\{g(x)\}$.

Recuérdese ahora que $[\mathbb{Q}\{\varphi_N(x)\}; \mathbb{Q}] = \phi(N)$ y que si $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$ entonces $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. Esto implica que $[\mathbb{Q}\{g(x)\}; \mathbb{Q}\{\varphi_n(x)\}] = \phi(m)$, así que $\varphi_m(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}\{\varphi_n(x)\}$ y de orden $\phi(m)$. De la misma manera, $[\mathbb{Q}\{g(x)\}; \mathbb{Q}\{\varphi_m(x)\}] = \phi(n)$, y $\varphi_n(x)$ será irreducible sobre $\mathbb{Q}\{\varphi_m(x)\}$ y de orden $\phi(n)$. Existe entonces un automorfismo $\sigma \in G\{g(x)/\mathbb{Q}\{\varphi_n(x)\}\}$, el cual es la identidad sobre $\mathbb{Q}\{\varphi_n(x)\}$ y cuyo orden es $\phi(m)$. De la misma manera, existirá $\rho \in G\{g(x)/\mathbb{Q}\{\varphi_m(x)\}\}$ el cual es la identidad sobre $\mathbb{Q}\{\varphi_m(x)\}$ y cuyo orden es $\phi(n)$. Es claro que

$$G\{g(x)/\mathbb{Q}\{\varphi_m(x)\}\} \approx [\rho]$$

y que $G\{g(x)/\mathbb{Q}\{\varphi_n(x)\}\} \approx [\sigma]$. Según lo dicho más arriba, se deduce entonces que $G\{f(x)\} \approx [\sigma] \times [\rho]$, así que $G\{f(x)\}$ es el producto directo interno de $[\sigma]$ y $[\rho]$.

1.4 Ejercicios

1. Demuestre los teoremas, lemas y corolarios enunciados en este capítulo.

2. Sean K un cuerpo numérico, $f(x) \in K[x]$ un polinomio de grado a lo sumo 3. Demuestre que $f(x)$ es irreducible sobre K si y sólo si ninguna raíz de $f(x)$ está en K. ¿Es $x^2 - 4x + 2$ irreducible sobre $\mathbb{Q}$? ¿Es este polinomio irreducible sobre $\mathbb{R}$? ¿Es $x^3 + x + 1$ irreducible sobre $\mathbb{Q}$?

3. Sea $\omega = e^{2\pi i/5}$. Demuestre que $[\mathbb{Q}[\omega];\mathbb{Q}] = 4$, verificando que $p_{\mathbb{Q},\omega}(x) = (x^5 - 1)/(x - 1)$.

4. Sea a trascendente sobre K, $K(a)$ el cuerpo de cocientes de $K[a]$. Sea $\sigma : K(a) \to K(a)$ definida por $\sigma(f(a)) = f(a^2)$ para cada función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, $p(x), q(x) \in K[x]$. Verifique que $\sigma \in \mathrm{Hom}(K(a)/K, K(a)/K)$, que $[K(a);K] = \infty$ y que σ no es sobreyectiva.

5. Sea M/K. Demuestre que si H es un subcuerpo normal de $G(M/K)$, entonces $F(H)$ es un subcuerpo estable de G.

6. Sean N/K, $G = G(N/K)$, $J \subseteq H \subseteq G$ subgrupos de G con $[H;J] = n < \infty$. Demuestre que $[F(J);F(H)] \leq n$.

7. Supongase que L/K y M/L son extensiones normales. Supóngase además que si $\sigma \in G(L/K)$ existe $\hat{\sigma} \in G(M/K)$ tal que $\hat{\sigma}\mid_L = \sigma$. Demuestre que M/K es normal.

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE PICARD-VESSIOT

Básicamente, la Teoría de Galois Diferencial es la Teoría de Galois para las ecuaciones diferenciales. Esta teoría tuvo su origen en los trabajos de los matemáticos franceses Charles Emile Picard (1856 - 1941) y Ernest Vessiot (1865 - 1952). Las contribuciones básicas de Picard a esta teoría fueron:

- *Sur les Groupes de Transformation des Equations Differentielles Lineaires* (Sobre los Grupos de Transformaciones de las Ecuaciones Diferenciales Lineales), publicado en 1883 por la Academia de Ciencias de París.

- *Sur Equations Differentielles et les Groupes Algebriques des Transformations* (Sobre las Ecuaciones Diferenciales Lineales y los Grupos Algebraicos de Transformaciones), publicado en 1887 por la Universidad de Toulouse.

- *Traité d'Analyse, Tome III* (Tratado de Análisis, Tomo III), publicado por Gauthiers - Villars en 1928.

Vessiot, por su parte, publicó muchos artículos, pero su más grande contribución fue su tesis doctoral titulada *Sur l'Integration des Equations*

Differentielles Lineaires (Sobre la Integración de las Ecuaciones Diferenciales Lineales), publicada en 1892 por parte de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Toulouse.

Este capítulo está basado en las referencias [1, 2, 3, 4, 8, 12].

2.1 Teoría de Galois diferencial

De forma análoga al caso clásico, considerando a $\mathbb{Q}$ como cuerpo de coeficientes, ahora se considera el cuerpo $\mathbb{C}(x)$ de funciones racionales en una variable compleja x. Este es un *cuerpo diferencial* con derivación $' = \frac{d}{dx} = \partial_x$ (es de por si un cuerpo cuyos elementos satisfacen la regla de Leibniz y sus derivadas siguen estando en el cuerpo).

Sea η una solución de la ecuación diferencial

$$z'' + az' + bz = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}(x),$$

en alguna extensión diferencial de $\mathbb{C}(x)$. La solución de la ecuación diferencial lineal anterior puede involucrar exponenciales, integrales indefinidas y raíces de polinomios. Las funciones trigonométricas pueden ser escritas en términos de exponenciales.

Definición 2.1. Sea η una solución de la ecuación diferencial

$$z'' + az' + bz = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}(x).$$

Se dice que:

1. η es algebraica sobre $\mathbb{C}(x)$ si η satisface una ecuación polinómica con coeficientes en $\mathbb{C}(x)$, es decir, η es una función algebraica de una variable (raíz).

2. η es una primitiva sobre $\mathbb{C}(x)$ si $\eta' \in \mathbb{C}(x)$, es decir, $\eta = \int f dx$ para algún $f \in \mathbb{C}(x)$ (integral).

3. η es una exponencial sobre $\mathbb{C}(x)$ si $\frac{\eta'}{\eta} \in \mathbb{C}(x)$, es decir, $\eta = e^{\int f dx}$ para algún $f \in \mathbb{C}(x)$ (exponencial de una integral).

Definición 2.2. Una solución η de una ecuación diferencial lineal se denomina liouvilliana, o resoluble por cuadraturas o que tiene solución en forma cerrada, si existe una cadena de cuerpos diferenciales

$$\mathbb{C}(x) = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset K_m = K,$$

con $\eta \in K$ y tal que para cada $i = 1, 2, ..., m$, $K_i = K_{i-1}(\eta_i)$, donde η_i es algebraica, primitiva o exponencial sobre K_{i-1}.

Tales soluciones liouvillianas son construidas usando funciones algebraicas, integrales y exponenciales. De esta forma se pueden obtener soluciones como logaritmos y funciones trigonométricas, pero no soluciones en términos de funciones de Bessel. El término liouvilliano es un poco más generoso que el de *funciones elementales* (algebraicas, logaritmos y exponenciales solamente), debido a que permite la integración indefinida arbitraria, es decir, se puede dejar la integral en forma implícita, como por ejemplo

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{1-x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Teorema 2.1. *Si $z'' + az' + bz = 0$, $a, b \in \mathbb{C}(x)$ tiene una solución liouvilliana, entonces toda solución es liouvilliana.*

Demostración. La segunda solución se construye con la exponencial de la cuadratura de la primera solución que es liouvilliana. Por la Definición 2.2, la segunda solución también es liouvilliana. □

Después de estas herramientas básicas sobre ecuaciones diferenciales, retomamos la Teoría de Galois de ecuaciones diferenciales lineales, también conocida como *Teoría de Picard - Vessiot* y como *Teoría de Galois Diferencial Lineal*. Supóngase que y_1, y_2 es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial reducida (EDLR) $y'' = r(x)y$, donde $r \in \mathbb{C}(x)$. Esto significa que y_1, y_2 son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ y toda solución es una combinación lineal de y_1 y y_2. Sea $K = \mathbb{C}(x)\langle y_1, y_2 \rangle$, el menor cuerpo diferencial que contiene a $\mathbb{C}(x)$ y a $\{y_1, y_2, y_1', y_2', \ldots\}$.

Definición 2.3. El grupo de todos los automorfismos diferenciales de K en K que dejan fijos (o invariantes) los elementos de $\mathbb{C}(x)$ se denomina el *Grupo de Galois de* K sobre $\mathbb{C}(x)$ y es denotado como en el capítulo anterior, por $G(K/\mathbb{C}(x))$.

Si $\sigma \in G(K/\mathbb{C}(x))$, entonces σy_1 y σy_2 son también soluciones, o lo que es igual, es otro sistema fundamental de soluciones de la EDLR. Por tal razón, existe una matriz

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}),$$

$GL(2, \mathbb{C})$ denotando el *grupo lineal de matrices cuadradas no singulares de tamaño* 2×2 con elementos complejos, tal que

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma y_1 \\ \sigma y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} A_\sigma.$$

Esto define una función inyectiva

$$\varphi : \quad G(K/\mathbb{C}(x)) \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

que solo depende de la elección de y_1, y_2. En otras palabras, A_σ es la matriz asociada al endomorfismo σ, el cual es automorfismo.

Definición 2.4. Un grupo algebraico de matrices 2×2 es un subgrupo $G \subset GL(2, \mathbb{C})$, definido por ecuaciones algebraicas en los elementos de matriz. Es decir, existe un conjunto de polinomios $\{P_i(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})\}_{i \in I}$, de tal manera que,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in G \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I, P_i(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = 0.$$

En tal caso G es una variedad algebraica provista de una estructura de grupo. En adelante se entiende que todo grupo mencionado es un *grupo algebraico de matrices*. Un primer ejemplo es el grupo especial lineal $SL(2, \mathbb{C})$, pues,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad \Leftrightarrow \quad x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} - 1 = 0.$$

Uno de los resultados fundamentales de la Teoría de Picard - Vessiot es el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *La imagen por φ de $G(K \diagup \mathbb{C}(x))$,*

$$\varphi\,(G(K \diagup \mathbb{C}(x))) \subset GL(2, \mathbb{C}),$$

es un grupo algebraico de matrices.

Teorema 2.4. *Para la EDLR, $\varphi\,(G(K \diagup \mathbb{C}(x))) \subset SL(2, \mathbb{C})$. Es decir, la imagen de $G(K \diagup \mathbb{C}(x))$ está en $SL(2, \mathbb{C})$.*

Demostración. Sean y_1, y_2 un sistema fundamental de soluciones de la EDLR, lo cual indica que $y_1'' = ry_1$, $y_2'' = ry_2$. El wronskiano está dado por

$$W = |U| = y_1 y_2' - y_1' y_2, \quad U = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}.$$

Ahora, derivando W se tiene

$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = ry_2 y_1 - ry_1 y_2 = 0.$$

Esto indica que $W \in \mathbb{C}$ y de esta manera

$$W = \sigma W = \sigma(|U|) = |\sigma U| = |UA_\sigma| = W|A_\sigma|,$$

por lo tanto

$$|A_\sigma| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

y así se concluye que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A_\sigma \in SL(2, \mathbb{C}),$$

que es el resultado deseado. □

Se enuncia ahora el teorema de Lie - Kolchin. Es de notar que un grupo algebraico G tiene un único subgrupo conexo G^0, el cual contiene la identidad y es un subgrupo normal de G de índice finito. Esto indica que G^0, componente identidad de G, es el subgrupo algebraico conexo más grande de G que contiene la identidad. De aquí se deduce que si $G = G^0$, entonces G es conexo.

Teorema 2.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Toda solución de la EDLR es liouvilliana.*
2. G^0 *es resoluble, es decir, existe una cadena de subgrupos normales*
$$e = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \ldots \triangleleft G_n = G^0$$
tal que el cociente G_i/G_j *es abeliano para todo* $n \geq i \geq j \geq 0$.
3. G^0 *es triangularizable, es decir, existe una base en* $\mathbb{C}^2$ *tal que*
$$G^0 \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{C},\ c \neq 0 \right\}.$$

Definición 2.5. Sea y_1, y_2 un sistema fundamental de soluciones de la EDLR en K. Sea $f(x_1, x_2)$ un polinomio homogeneo con coeficientes en $\mathbb{C}(x)$. Diremos que f es un *invariante* si para todo $\sigma \in G(K/\mathbb{C}(x))$, $\sigma f(y_1, y_2) = f(y_1, y_2)$. En este caso, $f(y_1, y_2) \in \mathbb{C}(x)$. Ahora, f es semi-invariante si para todo $\sigma \in G(K/\mathbb{C}(x))$, $\sigma f(y_1, y_2) = cf(y_1, y_2)$, $c \in \mathbb{C}$. Se observa que $\theta = \frac{f(y_1,y_2)'}{f(y_1,y_2)} \in \mathbb{C}(x)$.

Se dice que un grupo G es el conjugado de un grupo G' si existe una matriz J tal que $GJ = JG'$. En este caso, G y G' tienen la misma estructura algebraica.

Teorema 2.6. *Sea* G *un subgrupo algebraico de* $SL(2, \mathbb{C})$. *Entonces exclusivamente uno de los siguientes cuatro casos puede ocurrir:*

1. G *es triangularizable.*
2. G *es el conjugado de un subgrupo de*
$$\left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C},\ c \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad : c \in \mathbb{C}, c \neq 0 \right\}$$
y el caso 1 no se da.
3. G *es finito y los casos 1 y 2 no se dan.*
4. $G = SL(2, \mathbb{C})$.

Teorema 2.7. *De acuerdo con el Teorema 2.5, excepto por conjugación, hay tres grupos en el caso 3:*

1. *El grupo tetraedro. Este grupo es de orden 24 y está generado por*
$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\left(2e^{\frac{k\pi i}{3}}-1\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. *El grupo octaedro. Este grupo es de orden 48 y está generado por*
$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{4}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}e^{\frac{k\pi i}{4}}\left(e^{\frac{k\pi i}{2}}+1\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. *El grupo icosaedro. Este grupo es de orden 120 y está generado por*
$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k\pi i}{5}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \psi & -\phi \end{pmatrix},$$
siendo ϕ y psi definidas como
$$\phi = \frac{1}{5}\left(e^{\frac{3k\pi i}{5}} - e^{\frac{2k\pi i}{5}} + 4e^{\frac{k\pi i}{5}} - 2\right), \quad \psi = \frac{1}{5}\left(e^{\frac{3k\pi i}{5}} + 3e^{\frac{2k\pi i}{5}} - 2e^{\frac{k\pi i}{5}} + 1\right)$$

donde en los casos anteriores $0 \leq k \leq 5$.

La componente conexa de la identidad G^0 de los casos del Teorema 2.6 es resoluble excepto para el caso 4. Para los demás casos es abeliana excepto para el grupo dado por
$$G = G^0 = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, \mu \in \mathbb{C}\right\} \approx \mathbb{C}^* \propto \mathbb{C}.$$
Los casos abelianos de la componente conexa de la identidad son los siguientes
$$\text{Grupo trivial} \quad G^0 = e = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$
$$\text{Grupo diagonal o multiplicativo} \quad G^0 = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \quad \lambda \in \mathbb{C}^*\right\} \approx \mathbb{C}^*.$$
$$\text{Grupo aditivo} \quad G = G^0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \mu \in \mathbb{C}\right\} \approx \mathbb{C}.$$

Teorema 2.8. *Sea y_1, y_2 un sistema fundamental de soluciones de la EDLR, de tal manera que en la base $\{y_1, y_2\}$, el grupo $G(K/\mathbb{C}(x))$ se escribe en una de las formas canónicas del Teorema 2.6. Entonces, para todo $\sigma \in G(K/\mathbb{C}(x))$, uno de los siguientes casos puede ocurrir:*

1. $\sigma y_1 = cy_1$, $c \in \mathbb{C}$. *Es decir,* y_1 *es un semi-invariante.*

2. $\sigma y_1 = cy_1$ *y* $\sigma y_2 = c^{-1}y_2$, *o* $\sigma y_1 = cy_2$ *y* $\sigma y_2 = -c^{-1}y_1$. *Además,* y_1y_2 *es un semi-invariante y* $(y_1y_2)^2$ *es un invariante.*

3. *El grupo tetraedro:* $\left(y_1^4 + 8y_1y_2^3\right)^3$ *es un invariante. El grupo octaedro:* $\left(y_1^5y_2 - y_1y_2^5\right)^2$ *es un invariante. El grupo icosaedro:* $y_1^{11}y_2 - 11y_1^6y_2^6 - y_1y_2^{11}$ *es un invariante.*

4 *No hay semi-invariantes no triviales.*

Demostración. Se procederá tal como en el enunciado del teorema.

1. Por el Teorema 2.6, G es triangularizable, es decir,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{C},\ c \neq 0 \right\},$$

de tal manera que se tiene

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $\sigma y_1 = cy_1$, por lo tanto y_1 es un semi-invariante.

2. Por el Teorema 2.6, G es el conjugado de un subgrupo de

$$\left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C},\ c \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C},\ c \neq 0 \right\},$$

de tal manera que

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

o también

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

de lo cual se concluye que $\sigma y_1 = cy_1$ y $\sigma y_2 = c^{-1}y_2$, o $\sigma y_1 = cy_2$ y $\sigma y_2 = -c^{-1}y_1$, por lo tanto y_1y_2 es un semi-invariante y $(y_1y_2)^2$ es un invariante.

Los casos 3 y 4 se consideran de la misma forma. □

Ejemplos. Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $y'' = 0$, una base de soluciones está dada por $y_1 = 1$, $y_2 = x$. Si establecemos $K = \mathbb{C}(x)$ como cuerpo diferencial, vemos que $\sigma(1) = 1$, $\sigma(x) = x$, entonces la extensión de Picard-Vessiot es $L = K$ y por lo tanto

$$G(L/K) = e \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

  Ahora bien, si establecemos $K = \mathbb{C}$, entonces $L = K\langle x \rangle$, $x' \in \mathbb{C}$, $(\sigma(x))' = \sigma(x') = \sigma(1) = 1 = x'$, por tanto $\sigma(x) = x + d$, $d \in \mathbb{C}$, lo cual conlleva a

$$G(L/K) \cong \mathbb{G}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{C} \right\}.$$

- $y'' = \kappa y$, $\kappa \in \mathbb{C}^*$, la base de soluciones está dada por $y_1 = e^{\sqrt{\kappa}x}$, $y_2 = e^{-\sqrt{\kappa}x}$, con $\kappa \neq 0$. Si establecemos como cuerpo diferencial $K = \mathbb{C}(x)$, podemos ver que la extensión de Picard-Vessiot es $L = K\langle e^{\sqrt{k}x} \rangle$,

$$\sigma\left(\frac{y_1'}{y_1}\right) = \frac{(\sigma(y_1))'}{\sigma(y_1)} = \frac{y_1'}{y_1}, \quad \sigma\left(\frac{y_2'}{y_2}\right) = \frac{(\sigma(y_2))'}{\sigma(y_2)} = \frac{y_2'}{y_2},$$

  $\sigma(y_1 y_2) = \sigma(y_1)\sigma(y_2) = y_1 y_2 = 1$, $\sigma(y_1) = c y_1$, $\sigma(y_2) = d y_2$, $c, d \in \mathbb{C}$, pero $cd = 1$ y por lo tanto

$$G(L/K) \cong \mathbb{G}_m = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

  Ahora bien, si establecemos $K = \mathbb{C}$, obtenemos el mismo resultado.

- $y'' + \frac{n^2-1}{4n^2x^2} y = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, una base de soluciones está dada por $\langle y_1, y_2 \rangle$, donde

$$y_1 = x^{\frac{n+1}{2n}}, \quad y_2 = x^{\frac{n-1}{2n}}.$$

Si establecemos como cuerpo diferencial a $K = \mathbb{C}(x)$ y n par, entonces la extensión de Picard-Vessiot es $L = K\left\langle x^{\frac{1}{2n}}\right\rangle$,

$$\sigma(y_1) = cy_1, \quad \sigma^{2n}(y_1) = c^{2n}y_1^{2n} = \sigma(y_1^{2n}) = y_1^{2n}, \quad c^{2n} = 1,$$

$$\sigma(y_2) = dy_2, \quad \sigma^{2n}(y_2) = d^{2n}y_2^{2n} = \sigma(y_2^{2n}) = y_2^{2n}, \quad d^{2n} = 1,$$

$\sigma(y_1y_2) = y_1y_2 = \sigma(y_1)\sigma(y_2) = cdy_1y_2$ así que $cd = 1$ y por lo tanto

$$G(L/K) \cong \mathbb{G}^{[2n]} = \left\{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}, \quad c^{2n} = 1\right\}.$$

Ahora bien, si consideramos n impar, entonces $L = K\left\langle x^{\frac{1}{n}}\right\rangle$, y por lo tanto $G(L/K) \cong \mathbb{G}^{[n]}$.

- Ecuación reducida de Cauchy-Euler

$$y'' = \frac{m(m+1)}{x^2}y, \quad m \in \mathbb{C},$$

Una base de soluciones está dada por $y_1 = x^{m+1}$, $y_2 = x^{-m}$. Estableciendo como cuerpo diferencial a $K = \mathbb{C}(x)$, tendremos:

  - $m \in \mathbb{Z}$, $L = K$, $G(L/K) = e$,
  - $m \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $L = K\langle x^m\rangle$, $G(L/K) \cong \mathbb{G}^{[d]}$, $m = \frac{n}{d}$, $m \neq -\frac{1}{2}$,
  - $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, $L = K\langle x^m\rangle$, $G(L/K) \cong \mathbb{G}_m$.

2.2 Transformaciones en ecuaciones diferenciales

En este apartado consideraremos algunas transformaciones de diferenciales que involucren ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. En caso que ambas ecuaciones sean lineales de segundo orden, estudiaremos si se preserva el grupo de Galois de la ecuación de partida. Entre las transformaciones a considerar aquí están las transformaciones para llegar de ecuaciones de Riccati y de sistemas diferenciales lineales de dos ecuaciones de primer orden a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. También se presentarán la transformación que nos permite eliminar el término de la primera derivada en la ecuación de segundo orden, la algebrización y la transformación de Darboux, las cuales en algunos casos son transformaciones *iso-Galosianas*.

El siguiente teorema permite eliminar el coeficiente de $z^{(n-1)}$ en una ecuación diferencial lineal de orden n.

Teorema 2.9. *La ecuación diferencial*

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + ... + a_1 z' + a_0 z = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}(x),$$

se puede transformar en la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + b_{n-2}y^{(n-2)} + ... + b_1 y' + b_0 y = 0, \quad b_i \in \mathbb{C}(x),$$

mediante el cambio $z = yf$, *donde* $f = e^{-\frac{1}{n}\int p}$, $p = a_{n-1}$. *En particular, si* $n = 2$, *la ecuación diferencial* $z'' + az' + bz = 0$ *se transforma en la ecuación diferencial* $y'' = ry$, *donde* $r = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b$.

Demostración. Usando la fórmula de Abel $w' + pw = 0$, $w = Cf^n$, $C \in \mathbb{C}^*$, se tiene que $ncf^{n-1}f' + pCf^n = 0$, ahora, al dividir por w se sigue que $f = e^{-\frac{1}{n}\int p}$, donde $p = a_{n-1}$. Finalmente, un sencillo argumento inductivo ver que al reemplazar por yf en la ecuación diferencial inicial, el coeficiente de $z^{(n-1)}$ se anula. Realizando los cálculos se tiene que para $n = 2$, $z'' + az' + bz = 0$, se transforma en

$$y'' = \left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b\right)y. \quad \square$$

Teorema 2.10. *La ecuación diferencial* $z'' + az' + bz = 0$ *se transforma en la ecuación de Riccati* $v' = r - v^2$, *donde* $r = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b$.

Demostración. Por el Teorema 2.9, $y'' = ry$, donde $r = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b$. Ahora, al hacer la sustitución $v = \frac{y'}{y}$ se tiene

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - (y')^2}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2,$$

y por lo tanto

$$v' = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a' - b - v^2,$$

que es el resultado deseado. □

Definición 2.6. Consideremos las ecuaciones diferenciales lineales $\mathcal{L}$ y $\widetilde{\mathcal{L}}$, definidas sobre los cuerpos diferenciales K y $\widetilde{K}$ respectivamente. Sean L y $\widetilde{L}$ sus respectivas extensiones de Picard-Vessiot. Sea φ la transformación tal que $\mathcal{L} \mapsto \widetilde{\mathcal{L}}$, $K \mapsto \widetilde{K}$ y $L \mapsto \widetilde{L}$, decimos que:

1. φ es una *transformación iso-Galoisiana* siempre que
$$G(L/K) = G(\widetilde{L}/\widetilde{K}).$$
En caso que $\widetilde{L} = L$ y $\widetilde{K} = K$, decimos que φ es una *transformación fuertemente iso-Galoisiana.*

2. φ es una *transformación virtualmente iso-Galoisiana* siempre que
$$(G(L/K))^0 = (G(\widetilde{L}/\widetilde{K}))^0.$$

Teorema 2.11. *Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales*
$$\mathcal{L} := y'' + ay' + by = 0, \quad \widetilde{\mathcal{L}} := \zeta'' = r\zeta, \quad a,\, b,\, r\, \in K.$$
Sean $\kappa \in \mathbb{Q}$, $f \in K$, $a = 2\kappa(\ln f)'$ y la transformación φ tal que $\mathcal{L} \mapsto \widetilde{\mathcal{L}}$. Se tienen entonces las siguientes afirmaciones:

1. *La transformación φ es iso-Galoisiana siempre que $\kappa \in \mathbb{Z}$.*
2. *La transformación φ es virtualmente fuertemente iso-Galoisiana siempre que $\kappa \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{B} = \{y_1, y_2\}$ una base de soluciones y L la extensión de Picard-Vessiot de la ecuación diferencial $\mathcal{L}$. De igual manera, sean $\mathcal{B}' = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ una base de soluciones y $\widetilde{L}$ la extensión de Picard-Vessiot de la ecuación diferencial $\widetilde{\mathcal{L}}$. En virtud del Teorema 2.10, con el cambio de variable dependiente $y = \zeta e^{-\frac{1}{2}\int a dx}$ obtenemos $r = \frac{a^2}{4} + \frac{a'}{2} - b$ y por lo tanto $K = \widetilde{K}$. De esta manera, la relación entre L y $\widetilde{L}$ depende solamente de a:

1. Si $\kappa = n \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{B}' = \{f^n y_1, f^n y_2\}$, lo cual significa que $L = \widetilde{L}$ y por lo tanto φ es una transformación fuertemente iso-Galoisiana.

2. Si $\kappa = \frac{n}{m}$, con $\operatorname{mcd}(n,m) = 1$, $\frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{B}' = \{f^{\frac{n}{m}} y_1, f^{\frac{n}{m}} y_2\}$, lo cual significa que para $\widetilde{L}$ solo uno de los siguientes casos puede ocurrir:
   - $\widetilde{L}$ es una extensión algebraica de grado a lo sumo m de L y por lo tanto la transformación φ es virtualmente fuertemente iso-Galoisiana, o
   - $L = \widetilde{L}$ siempre que $f^{\frac{n}{m}} \in K$, lo cual significa que φ es una transformación fuertemente iso-Galoisiana.

Teniendo el resultado deseado. $\square$

Se puede observar que la transformación φ presentada en el Teorema 2.11 no es inyectiva debido a que hay una gran cantidad de ecuaciones diferenciales de la forma $\mathcal{L}$ que pueden ser transformadas a la misma ecuación diferencial $\widetilde{\mathcal{L}}$. A manera de ejemplo se puede ver que fijando r podemos obtener diferentes valores de a y b, es decir, a través de la ecuación de Riccati en a.

Como una consecuencia del Teorema 2.11 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.1. (Sturm-Liouville) *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\mathcal{L} := \big(ay'\big)' = (\lambda b - \mu)y, \quad a, b \in K, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

donde L, $\widetilde{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ *y* φ *están dadas como en el Teorema 2.11. Entonces:*

- $\widetilde{L}$ *es una extensión cuadrática de* L*, lo cual significa que* φ *es virtualmente fuertemente iso-Galoisiana, o*
- $\widetilde{L} = L$ *siempre que* $a^{\frac{1}{2}} \in K$*, lo cual significa que* φ *es fuertemente iso-Galoisiana.*

Tal como vimos en los ejemplos anteriores, es usual que el cuerpo diferencial sea el de las funciones racionales. Sin embargo, es posible que la ecuación diferencial tenga coeficientes que no son funciones racionales, tales como funciones exponenciales, trigonométricas, etc. En este caso, es muy útil transformar la ecuación a una que tenga coeficientes funciones racionales, procedimiento que hemos llamado *Algebrización*, el cual se detallará más adelante.

Teorema 2.12. (Cambio de variable independiente) *Consideremos la siguiente ecuación diferencial con coeficientes en* $\mathbb{C}(z)$*:*

$$\mathcal{L}_z := \partial_z^2 y + a(z)\partial_z y + b(z)y = 0, \quad \partial_z := \frac{d}{dz} \tag{2.1}$$

y $\mathbb{C}(z) \hookrightarrow L$ *la correspondiente extensión de Picard-Vessiot. Sea* (K, δ) *un cuerpo diferencial con* $\mathbb{C}$ *como cuerpo de constantes. Sea* $\theta \in K$ *un elemento no constante. Entonces, por el cambio de variable* $z = \theta(x)$*, la ecuación* (2.1) *se transforma en*

$$\mathcal{L}_x := \partial_x^2 r + \left(a(\theta)\partial_x \theta - \frac{\partial_x^2 \theta}{\partial_x \theta} \right) \partial_x r + b(\theta)(\partial_x \theta)^2 r = 0, \tag{2.2}$$

$\partial_x = \delta$*,* $r = y \circ \theta$*. Sea* $K_0 \subset K$ *el cuerpo diferencial más pequeño que contiene* θ *y* $\mathbb{C}$*. Entonces la ecuación* (2.2) *es una ecuación diferencial con coeficientes en* K_0*. Sea* $K_0 \hookrightarrow L_0$ *la correspondiente extensión de Picard-Vessiot. Asumamos que*

$$\mathbb{C}(z) \to K_0, \quad z \mapsto \theta$$

es una extensión algebraica, entonces

$$(G(L_0/K_0))^0 = (G(L/\mathbb{C}(z)))^0.$$

Demostración. Se aplica la regla de la cadena para obtener la ecuación (2.2) a través de la ecuación (2.1). Las componentes conexas se preservan por ser K_0 una extensión algebraica de $\mathbb{C}(z)$. □

Teorema 2.13. *Consideremos las ecuaciones diferenciales* $\mathcal{L}_x$ *y* $\mathcal{L}_z$ *como en el Teorema 2.12. Sea* φ *la transformación dada por*

$$\varphi : \begin{array}{l} z \mapsto \theta(x) \\ \partial_z \mapsto \frac{1}{\partial_x \theta}\delta. \end{array}$$

Entonces $G(L_0/K_0) \simeq G(L/K_0 \cap L) \subset G(L/\mathbb{C}(z))$*. Además, si* $K_0 \cap L$ *es algebraica sobre* $\mathbb{C}(z)$*, entonces* $(G(L_0/K_0))^0 \simeq (G(L/\mathbb{C}(x)))^0$*.*

Demostración. Por el Teorema 2.12, la transformación φ nos conduce a

$$\mathbb{C}(z) \simeq \varphi(\mathbb{C}(z)) \hookrightarrow K_0,$$

es decir, podemos identificar $\mathbb{C}(z)$ con $\varphi(\mathbb{C}(z))$, y por lo tanto podemos ver a $\mathbb{C}(z)$ como subcuerpo de K_0. Esto nos conlleva a tener

$$\mathrm{DGal}(L_0/K_0) \simeq \mathrm{DGal}(L/K_0 \cap L) \subset \mathrm{DGal}(L/\mathbb{C}(z))$$

y si $K_0 \cap L$ es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$, entonces

$$(G(L_0/K_0))^0 \simeq (G(L/\mathbb{C}(z)))^0,$$

obteniendo el resultado deseado. $\square$

Para el resto de esta sección utilizaremos $z = z(x)$ en lugar de θ y las notaciones de derivadas parciales: ∂_x, ∂_z, etc.

La transformación que nos permite llegar de la ecuación (2.2) a la ecuación (2.1) es un proceso de Algebrización. Esto indica que podemos algebrizar ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes funciones que no son racionales si podemos llevarla a la forma de la ecuación (2.2). Para hacer este procedimiento, denominado *Algebrización forzosa*, usaremos los siguientes pasos.

Paso 1. Buscar $(\partial_x z)^2$ en el coeficiente de y para obtener $\partial_x z$ y z.

Paso 2. Dividir por $(\partial_x z)^2$ al coeficiente de y para obtener $b(z)$ y verificar si $b \in \mathbb{C}(z)$.

Paso 3. Sumar $(\partial_x^2 z)/\partial_x z$ y dividir por $\partial_x z$ al coeficiente de $\partial_x y$ para obtener $a(z)$. Verificar si $a \in \mathbb{C}(z)$.

Para ilustrar el procedimiento de la Algebrización forzosa se presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\partial_x^2 r - \frac{1}{x(\ln x + 1)}\partial_x r - (\ln x + 1)^2 r = 0.$$

Para *algebrizar* esta ecuación diferencial hacemos $(\partial_x z)^2 = (\ln x + 1)^2$, lo cual conlleva a $\partial_x z = \ln x + 1$ y por lo tanto

$$z = \int (\ln x + 1)dx = x \ln x, \quad b(z) = -1.$$

Ahora encontramos $a(z)$ en la expresión

$$a(z)(\ln x+1)-\frac{1}{x(\ln x+1)}=-\frac{1}{x(\ln x+1)},$$

obteniendo $a(z)=0$. Así que la nueva ecuación diferencial está dada por $\partial_z^2 y - y = 0$, en la cual $y(z(x)) = r(x)$ y una base de soluciones de esta ecuación diferencial está dada por $\langle e^z, e^{-z}\rangle$. Por lo tanto, la respectiva base de soluciones de la primera ecuación diferencial está dada por $\langle e^{x\ln x}, e^{-x\ln x}\rangle$.

En general este método no es claro porque la búsqueda de $z = z(x)$ en $b(z)(\partial_x z)^2$ puede ser demasiado aleatorio, casi como una lotería, o simplemente no existe z tal que $a(z), b(z) \in \mathbb{C}(z)$. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones

$$\partial_x^2 r + \frac{\mp 2x\ln^2 x \mp 2x\ln x - 1}{x\ln x + x}\partial_x r + \frac{-2x\ln^2 x - 3x\ln x - x \mp 1}{x\ln x + x} r = 0,$$

$$\partial_x^2 r + \frac{4x\ln x + 2x}{4x^2\ln x}\partial_x r - \frac{1}{4x^2\ln x} r = 0,$$

$$(x^2\ln^2 x)\partial_x^2 r + (x\ln^2 x - 3x\ln x)\partial_x r + 3r = 0,$$

no pueden ser algebrizadas con este método, aunque cuando éstas sean transformables a ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Existe un algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales sobre $\mathbb{C}(x, e^{\int f dx})$ sin usar esta algebrización. Como una aplicación del Teorema 2.12 se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.14. (Ecuaciones diferenciales lineales sobre $\mathbb{C}(x, e^{\int f})$) *Sea $f \in \mathbb{C}(x)$ una función racional. Entonces, la ecuación diferencial*

$$\partial_x^2 r - \left(f + \frac{\partial_x f}{f} - f e^{\int f} a\left(e^{\int f}\right)\right)\partial_x r + \left(f\left(e^{\int f}\right)\right)^2 b\left(e^{\int f}\right) r = 0,$$

es algebrizable mediante el cambio de variable $z = e^{\int f}$ y su forma algebraica está dada por

$$\partial_z^2 y + a(z)\partial_z y + b(z) y = 0, \quad r(x) = y(z(x)).$$

Demostración. Asumiendo que $r(x) = y(z(x))$ y $z = z(x) = e^{\int f dx}$, podemos ver que $\partial_x z = fz$, $\partial_z y = \frac{\partial_x r}{fz}$, por lo tanto se tiene

$$\partial_z^2 y = \frac{1}{fz}\partial_x\left(\frac{\partial_x r}{fz}\right) = \frac{1}{\left(fe^{\int f}\right)^2}\left(\partial_x^2 r - f + \left(\frac{\partial_x f}{f}\right)\right)\partial_x r.$$

Al reemplazar las anteriores expresiones en la ecuación diferencial

$$\partial_z^2 y + a(z)\partial_z y + b(z)y = 0,$$

obtenemos el resultado deseado. □

Para ilustrar el resultado anterior, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

$$\partial_x^2 r - \left(x + \frac{1}{x} - 2xe^{x^2}\right)\partial_x r + \lambda x^2 e^{x^2} r = 0,$$

es algebrizable mediante el cambio de variable $z = e^{\frac{x^2}{2}}$ y su forma algebraica está dada por

$$\partial_z^2 y + 2z\partial_z y + \lambda y = 0.$$

De acuerdo al Teorema 2.14 se tienen los siguientes casos posibles.

1. $f = n\frac{\partial_x h}{h}$, para una función racional h, $n \in \mathbb{Z}_+$, se tiene el caso trivial, ambas ecuaciones tienen coeficientes funciones racionales, por lo tanto no necesita ser algebrizada.

2. $f = \frac{1}{n}\frac{\partial_x h}{h}$, para una función racional h, $n \in \mathbb{Z}^+$, la ecuación diferencial está definida sobre una extensión algebraica de $\mathbb{C}(x)$ y por lo tanto esta ecuación no tiene coeficientes funciones racionales.

3. $f \neq q\frac{\partial_x h}{h}$, para cualquier función racional h, $q \in \mathbb{Q}$, la ecuación diferencial está definida sobre una extensión trascendente de $\mathbb{C}(x)$ y por lo tanto no tiene coeficientes funciones racionales.

Algebrizar ecuaciones de segundo orden es más fácil cuando el término $\partial_x r$ está ausente, es decir, ecuaciones de la forma$y' = r(x)y$ y el cambio de variable es *Hamiltoniano*.

Definición 2.7. (Cambio de variable Hamiltoniano) Un cambio de variable $z = z(x)$ se denomina *Hamiltoniano* siempre que $(z(x), \partial_x z(x))$ es una curva solución del sistema Hamiltoniano clásico autónomo de dos grados de libertad

$$\begin{array}{l} \partial_x z = \partial_w H \\ \partial_x w = -\partial_z H \end{array} \quad \text{with} \quad H = H(z,w) = \frac{w^2}{2} + V(z),$$

para algún $V \in K$.

Asumamos que podemos algebrizar la ecuación diferencial (2.2) a través del cambio de variable Hamiltoniano $z = z(x)$, es decir, $V \in \mathbb{C}(z)$. Entonces, $K_0 = \mathbb{C}(z, \partial_x z, \ldots)$, pero, tenemos la relación algebraica

$$(\partial_x z)^2 = 2h - 2V(z), \quad h = H(z, \partial_x z) \in \mathbb{C},$$

por lo tanto $K_0 = \mathbb{C}(z, \partial_x z)$ es una extensión algebraica de $\mathbb{C}(z)$. Por el Teorema 2.12, la componente conexa de la identidad del grupo de Galois diferencial es preservado. Por otra parte, podemos identificar un cambio de variable Hamiltoniano $z = z(x)$ si existe $\alpha \in K$ tal que $(\partial_x z)^2 = \alpha(z)$. Es por lo tanto que introducimos de manera natural el concepto *Algebrización Hamiltoniana*, la cual corresponde el proceso de algebrización realizado a través de un cambio de variable Hamiltoniano.

El siguiente resultado es un ejemplo de Algebrización Hamiltoniana y corresponde al caso de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden reducida.

Teorema 2.15. (Algebrización Hamiltoniana) *La ecuación diferencial*

$$\partial_x^2 r = q(x) r$$

es algebrizable mediante el cambio de variable $z = z(x)$ si y solo si existen f, α tales que

$$\frac{\partial_z \alpha}{\alpha}, \quad \frac{f}{\alpha} \in \mathbb{C}(z), \ \textit{where } f(z(x)) = q(x), \quad \alpha(z) = 2(H - V(z)) = (\partial_x z)^2.$$

Además, la forma algebraica de la ecuación $\partial_x^2 r = q(x) r$ es

$$\partial_z^2 y + \frac{1}{2}\frac{\partial_z \alpha}{\alpha}\partial_z y - \frac{f}{\alpha} y = 0, \quad r(x) = y(z(x)). \tag{2.3}$$

A continuación se presenta un procedimiento sistemático para algebrizar ecuaciones diferenciales de la forma $\partial_x^2 r = q(x)r$, por lo tanto se proponen los siguientes pasos.

Paso 1. Encontrar un *cambio de variable Hamiltoniano* $z = z(x)$ y dos funciones f y α tales que $q(x) = f(z(x))$ y $(\partial_x z(x))^2 = \alpha(z(x))$.

Paso 2. Verificar si se cumple que $f(z)/\alpha(z) \in \mathbb{C}(z)$ y $\partial_z \alpha(z)/\alpha(z) \in \mathbb{C}(z)$ para ver si la ecuación $\partial_x^2 r = q(x)r$ es algebrizable.

Paso 3. Si la ecuación $\partial_x^2 r = q(x)r$ es algebrizable, su algebrización está dada por

$$\partial_z^2 y + \frac{1}{2}\frac{\partial_z \alpha}{\alpha}\partial_z y - \frac{f}{\alpha} y = 0, \quad y(z(x)) = r(x).$$

Cuando hayamos algebrizado la ecuación diferencial $\partial_x^2 r = q(x)r$, estudiamos su integrabilidad y grupos de Galois diferencial.

Para ilustrar este procedimiento se presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo.

- Dada la ecuación diferencial $\partial_x^2 r = f(\tan x)r$ con $f \in \mathbb{C}(\tan x)$, podemos escoger el cambio de variable $z = z(x) = \tan x$ para obtener $\alpha(z) = (1+z^2)^2$, por lo tanto $z = z(x)$ es un cambio de variable Hamiltoniano. Podemos ver que $\frac{\partial_z \alpha}{\alpha}, \frac{f}{\alpha} \in \mathbb{C}(z)$ y la forma algebraica de la ecuación diferencial $\partial_x^2 r = f(\tan x)r$ con este cambio de variable Hamiltoniano es

$$\partial_z^2 y + \frac{2z}{1+z^2}\partial_z y - \frac{f(z)}{(1+z^2)^2} y = 0, \quad y(\tan x) = r(x).$$

- Dada la ecuación diferencial

$$\partial_x^2 r = \frac{\sqrt{1+x^2}+x^2}{1+x^2} r,$$

podemos escoger $z = z(x) = \sqrt{1+x^2}$ para obtener

$$f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^2}, \quad \alpha(z) = \frac{z^2-1}{z^2},$$

por lo tanto $z = z(x)$ es un cambio de variable Hamiltoniano. Podemos ver que $\frac{\partial_z \alpha}{\alpha}, \frac{f}{\alpha} \in \mathbb{C}(z)$ y la forma algebraica para este caso es

$$\partial_z^2 y + \frac{1}{z(z^2-1)}\partial_z y - \frac{z^2+z-1}{z^2-1} y = 0, \quad y(\sqrt{1+x^2}) = r(x).$$

Se puede notar que en general el método de Algebrización Hamiltoniana no es un algoritmo, porque el problema no trivial que se presenta es obtener un Hamiltoniano H adecuado que satisfaga la definición 2.7. Ahora presentamos un caso particular de Algebrización Hamiltoniana, la cual se puede considerar como un algoritmo.

Teorema 2.16. (Algoritmo de Algebrización Hamiltoniana) *Consideremos* $q(x) = g(z_1, \cdots, z_n)$, *donde* $z_i = e^{\lambda_i x}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$. *La ecuación* $\partial_x^2 r = q(x) r$ *es algebrizable si y sólo si*

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \in \mathbb{Q}^*, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, \quad g \in \mathbb{C}(z).$$

Además, $\lambda_i = c_i \lambda$, *donde* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *y* $c_i \in \mathbb{Q}^*$ *y por el cambio de variable Hamiltoniano*

$$z = e^{\frac{\lambda x}{q}}, \text{ donde } c_i = \frac{p_i}{q_i}, p_i, q_i \in \mathbb{Z}^*, \ \mathrm{mcd}(p_i, q_i) = 1 \text{ y}$$

$q = \mathrm{MCM}(q_1, \cdots, q_n)$, *la algebrización de la ecuación diferencial*

$$\partial_x^2 r = q(x) r$$

es la ecuación diferencial

$$\partial_z^2 y + \frac{1}{z}\partial_z y - q^2 \frac{g(z^{m_1}, \ldots, z^{m_n})}{\lambda^2 z^2} y = 0, \quad m_i = \frac{q p_i}{q_i}, \quad y(z(x)) = r(x).$$

Demostración. Asumiendo $\lambda_i/\lambda_j = c_{ij} \in \mathbb{Q}^*$ podemos ver que existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $c_i \in \mathbb{Q}^*$ tal que $\lambda_i = \lambda c_i$, así que

$$e^{\lambda_i x} = e^{c_i \lambda x} = e^{\frac{p_i}{q_i}\lambda x} = \left(e^{\frac{\lambda}{q}x}\right)^{\frac{q p_i}{q_i}}, \ p_i, q_i \in \mathbb{Z}^*, \ \mathrm{mcd}(p_i, q_i) = 1,$$

$\mathrm{MCM}(q_1, \ldots, q_n) = q$. Ahora bien, estableciendo $z = z(x) = e^{\frac{\lambda}{q}x}$ podemos ver que

$$f(z) = g(z^{m_1}, \ldots, z^{m_n}), \quad m_i = \frac{qp_i}{q_i}, \quad \alpha = \frac{\lambda^2 z^2}{q^2}.$$

Debido a que $q|q_i$, tenemos que $m_i \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$\frac{\partial_z \alpha}{\alpha}, \quad \frac{f}{\alpha} \in \mathbb{C}(z)$$

y la forma algebraica está dada por

$$\partial_z^2 y + \frac{1}{z}\partial_z y - q^2 \frac{g(z^{m_1}, \ldots, z^{m_n})}{\lambda^2 z^2} y = 0, \quad y(z(x)) = r(x).$$

Los teoremas 2.15 y 2.16 permiten algebrizar un gran número de ecuaciones diferenciales de segundo orden. En particular, bajo los supuestos del teorema 2.16, podemos algebrizar automáticamente ecuaciones diferenciales con coeficientes trigonométricos o hiperbólicos.

Consideremos ahora los siguientes ejemplos.

- Dada la ecuación diferencial

  $$\partial_x^2 r = \frac{e^{\frac{1}{2}x} + 3e^{-\frac{2}{3}x} - 2e^{\frac{5}{4}x}}{e^x + e^{-\frac{3}{2}x}} r, \; \lambda_1 = \frac{1}{2}, \; \lambda_2 = -\frac{2}{3}, \; \lambda_3 = \frac{5}{4}, \; \lambda_4 = 1, \; \lambda_5 = -\frac{3}{2},$$

  podemos ver que $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbb{Q}$, $\lambda = 1$, $q = \mathrm{lcm}(1, 2, 3, 4) = 12$ y el cambio de variable Hamiltoniano para este caso es $z = z(x) = e^{\frac{1}{12}x}$. Podemos ver que

  $$\alpha(z) = \frac{1}{144}z^2, \quad f(z) = \frac{z^6 + 3z^{-8} - 2z^{15}}{z^{12} + z^{-18}}, \quad \frac{\partial_z \alpha}{\alpha}, \frac{f}{\alpha} \in \mathbb{C}(z)$$

  y la forma algebraica está dada por

  $$\partial_z^2 y + \frac{1}{z}\partial_z y - 144 \frac{z^6 + 3z^{-8} - 2z^{15}}{z^{14} + z^{-16}} y = 0, \quad y(e^{\frac{1}{12}x}) = r(x).$$

- Dada la ecuación diferencial

  $$\partial_x^2 r = (e^{2\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x} - e^{3x})r, \; \lambda_1 = 2\sqrt{2}, \; \lambda_2 = -\sqrt{2}, \; \lambda_3 = 3,$$

  podemos ver que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}$, pero $\lambda_1/\lambda_3 \notin \mathbb{Q}$, por lo tanto esta ecuación diferencial no puede ser algebrizada.

También se puede notar que es posible usar el método de la algebrización para transformar ecuaciones diferenciales, aún cuando los coeficientes de la ecuación diferencial de partida sean funciones racionales o los coeficientes de la ecuación diferencial de llegada no sean funciones racionales.

Como ilustración de la afirmación anterior se presentan los siguientes ejemplos.

- Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\partial_x^2 r = \frac{x^4+3x^2-5}{x^2+1} r = 0,$$

  podemos escoger $z = z(x) = x^2$, así que $\alpha = 4z$ y la nueva ecuación diferencial es

$$\partial_z^2 y + \frac{1}{2z}\partial_z y - \frac{z^2+2z-5}{4z(z+1)} y = 0, \quad y(x^2) = r(x).$$

- Consideremos la ecuación diferencial de Mathieu $\partial_x^2 r = (a+b\cos(x))r$, podemos escoger $z(x) = \ln(\cos(x))$, así que $\alpha = e^{-2z}-1$ y la nueva ecuación diferencial es

$$\partial_z^2 y - \frac{1}{1-e^{2z}}\partial_z y - \frac{ae^{2z}+be^{3z}}{1-e^{2z}} y = 0, \quad y(\ln(\cos(x))) = r(x).$$

La Algebrización Hamiltoniana, teoremas 2.15 y 2.16, ha sido utilizada con éxito en diferentes campos de aplicación de las ecuaciones diferenciales, en particular mecánica Hamiltoniana y mecánica cuántica. Sin embargo una generalización del Teorema 2.14 para ecuaciones diferenciales de orden superior no es trivial y requiere de elaboración. Pero, es posible obtener generalizaciones de los teoremas 2.15 y 2.16 utilizando los cambios de variable Hamiltonianos. Recordemos que el cambio de variable $z = z(x)$ es Hamiltoniano si existe α tal que $(\partial_x z)^2 = \alpha(z)$. Más específicamente, si $z = z(x)$ es un cambio de variable Hamiltoniano, podemos escribir $\partial_x z = \sqrt{\alpha}$, lo cual nos conduce a la siguiente notación: $\widehat{\partial}_z = \sqrt{\alpha}\partial_z$.

Podemos ver que $\widehat{\partial}_z$ es una *derivación* porque satisface

$$\widehat{\partial}_z(f+g) = \widehat{\partial}_z f + \widehat{\partial}_z g$$

y las reglas de Leibnitz

$$\widehat{\partial}_z(f\cdot g)=\widehat{\partial}_z f\cdot g+f\cdot\widehat{\partial}_z g,\quad \widehat{\partial}_z\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\widehat{\partial}_z f\cdot g-f\cdot\widehat{\partial}_z g}{g^2}.$$

Podemos notar que la regla de la cadena está dada por $\widehat{\partial}_z(f\circ g)=\partial_g f\circ g\widehat{\partial}_z(g)\neq\widehat{\partial}_g f\circ g\widehat{\partial}_z(g)$. La iteración de $\widehat{\partial}_z$ está dada por

$$\widehat{\partial}_z^0=1,\quad \widehat{\partial}_z=\sqrt{\alpha}\partial_z,\quad \widehat{\partial}_z^n=\sqrt{\alpha}\partial_z\widehat{\partial}_z^{n-1}=\underbrace{\sqrt{\alpha}\partial_z\left(\ldots\left(\sqrt{\alpha}\partial_z\right)\right)}_{n \text{ veces } \sqrt{\alpha}\partial_z}.$$

Decimos que un cambio de variable es racional cuando el *potencial* $V\in\mathbb{C}(x)$ y por lo tanto $\alpha\in\mathbb{C}(x)$. A partir de ahora, para el resto de esta monografía, se entenderá $\widehat{\partial}_z=\sqrt{\alpha}\partial_z$ donde $z=z(x)$ es un cambio de variable Hamiltoniano y $\partial_x z=\sqrt{\alpha}$. En particular, $\widehat{\partial}_z=\partial_z=\partial_x$ si y solo si $\sqrt{\alpha}=1$, es decir, $z=x$.

Teorema 2.17. *Consideremos los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales $[A]$ y $[\widehat{A}]$ dados respectivamente por*

$$\partial_x\mathbf{Y}=-A\mathbf{Y},\quad \widehat{\partial}_z\widehat{\mathbf{Y}}=-\widehat{A}\widehat{\mathbf{Y}},\quad A=[a_{ij}],\quad \widehat{A}=[\widehat{a}_{ij}],\quad \mathbf{Y}=[y_{i1}],\quad \widehat{\mathbf{Y}}=[\widehat{y}_{i1}],$$

donde $a_{ij}\in K=\mathbb{C}(z(x),\partial_x(z(x)))$, $\widehat{a}_{ij}\in\mathbb{C}(z)\subseteq\widehat{K}=\mathbb{C}(z,\sqrt{\alpha})$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$, $a_{ij}(x)=\widehat{a}_{ij}(z(x))$ y $y_{i1}(x)=y_{i1}(z(x))$. Supongamos que L y $\widehat{L}$ son las extensiones de Picard-Vessiot de $[A]$ y $[\widehat{A}]$ respectivamente. Si la transformación φ está dada por

$$\varphi:\begin{array}{l} x\mapsto z\\ a_{ij}\mapsto\widehat{a}_{ij}\\ y_{i1}(x)\mapsto\widehat{y}_{i1}(z(x))\\ \partial_x\mapsto\widehat{\partial}_z\end{array},$$

entonces las siguientes afirmaciones se mantienen.

- $K\simeq\widehat{K},\quad (K,\partial_x)\simeq(\widehat{K},\widehat{\partial}_z)$.
- $G(L/K)\simeq\mathrm{DGal}(\widehat{L}/\widehat{K})\subset G(\widehat{L}/\mathbb{C}(z))$.
- $(G(L/K))^0\simeq(G(\widehat{L}/\mathbb{C}(z))^0$.
- $\mathcal{E}(A)\simeq\mathcal{E}(\widehat{A})$.

Demostración. Debido a que $z = z(x)$es un cambio de variable Hamiltoniano racional, la transformación φ nos conduce a

$$\mathbb{C}(z) \simeq \varphi(\mathbb{C}(z)) \hookrightarrow K, \quad K \simeq \widehat{K}, \quad \mathbb{C}(z) \hookrightarrow \widehat{K}, \quad (K, \partial_x) \simeq (\widehat{K}, \widehat{\partial}_z)$$

esto es, podemos identificar $\mathbb{C}(z)$ con $\varphi(\mathbb{C}(z))$, y por lo tanto podemos ver a $\mathbb{C}(z)$ como un subcuerpo de K y entonces, por el diagrama de Kaplansky se observa que

$$\begin{array}{cccc} & & L & {\scriptstyle G(L/K)} \\ \widehat{L} & & & K \\ {\scriptstyle G(\widehat{L}/\widehat{K})} & & \widehat{K} & \\ & & \mathbb{C}(z) & \end{array}$$

en consecuencia tenemos

$$G(L/K) \simeq G(\widehat{L}/\widehat{K}) \subset G(\widehat{L}/\mathbb{C}(z))\,(G(L/K))^0 \simeq (G(\widehat{L}/\mathbb{C}(z)))^0.$$

Cabe notar que la transformación φ, dada en el Teorema 2.17, es virtualmente fuertemente iso-Galoisiana cuando $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{C}(z)$ y para $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{C}(z)$, φ es fuertemente iso-Galoisiana. Además, por el *método del vector cíclico*, podemos escribir los sistemas $[A]$ y $[\widehat{A}]$ en términos de las ecuaciones diferenciales $\mathcal{L}$ y $\widehat{\mathcal{L}}$. De esta manera, $\widehat{\mathcal{L}}$ proviene de una transformación que solo involucra un cambio de variable independiente en la ecuación diferencial $\mathcal{L}$ y por lo tanto $\mathcal{E}(\mathfrak{L}) \simeq \mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{L}})$.

Ejemplo. Consideremos el sistema

$$[A] := \begin{array}{l} \partial_x\gamma_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{e^x+e^{-x}}\gamma_3, \\[2ex] \partial_x\gamma_2 = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\gamma_3, \\[2ex] \partial_x\gamma_3 = \frac{2\sqrt{2}}{e^x+e^{-x}}\gamma_1 - \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\gamma_2, \end{array}$$

el cual mediante el cambio de variable Hamiltoniano $z = e^x$, y por lo tanto $\sqrt{\alpha} = z$, es transformado en el sistema

$$[\widehat{A}] := \begin{array}{l} \partial_z \widehat{\gamma}_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\widehat{\gamma}_3, \\ \\ \partial_z \widehat{\gamma}_2 = \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}\widehat{\gamma}_3, \\ \\ \partial_z \widehat{\gamma}_3 = \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\widehat{\gamma}_1 - \frac{z^2-1}{x(x^2+1)}\widehat{\gamma}_2. \end{array}$$

Una solución de este sistema $[\widehat{A}]$ está dado por

$$\frac{1}{z^2+1}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-z^2) \\ z \\ -z \end{pmatrix},$$

y por lo tanto,

$$\frac{1}{e^{2x}+1}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-e^{2x}) \\ e^x \\ -e^x \end{pmatrix}$$

es la correspondiente solución para el sistema $[A]$.

Se puede observar que la algebrización dada en el teorema 2.15 es una ejemplo de como el introducir la nueva derivación $\widehat{\partial}_z$ simplifica las demostraciones y cálculos. El mencionado teorema se extiende de manera natural para la ecuación diferencial

$$\partial_x^2 y + a\partial_x y + by = 0,$$

usando φ para obtener $\widehat{\partial}_z^2\widehat{y} + \widehat{a}\widehat{\partial}_z\widehat{y} + \widehat{b}\widehat{y} = 0$, lo cual es equivalente a

$$\alpha\partial_z^2\widehat{y} + \left(\frac{\partial_x\alpha}{2} + \sqrt{\alpha}\widehat{a}\right)\partial_z\widehat{y} + \widehat{b}\widehat{y} = 0, \tag{2.4}$$

donde $y(x) = \widehat{y}(z(x))$, $\widehat{a}(z(x)) = a(x)$ y $\widehat{b}(z(x)) = b(x)$.

En general, para $y(x) = \widehat{y}(z(x))$, la ecuación diferencial

$$F(\partial_x^n y, \ldots, y, x) = 0$$

con coeficientes dados por $a_{i_k}(x)$ es transformada en la ecuación

$$\widehat{F}(\widehat{\partial}_z^n\widehat{y}, \ldots, \widehat{y}, z) = 0$$

con coeficientes dados por $\widehat{a}_{i_k}(z)$, donde $a_{i_k}(x) = \widehat{a}_{i_k}(z(x))$. En particular, para $\sqrt{\alpha}, \widehat{a}_{i_k} \in \mathbb{C}(z)$, la ecuación diferencial

$$\widehat{F}(\widehat{\partial}_z^n \widehat{y}, \dots, \widehat{y}, z) = 0$$

es la Algebrización Hamiltoniana de

$$F(\partial_x^n y, \dots, y, x) = 0.$$

Ahora bien, si cada derivación ∂_x tiene orden par, entonces α y $\widehat{a}_{i_k}$ pueden ser funciones racionales para algebrizar la ecuación diferencial

$$F(\partial_x^n y, \dots, y, x) = 0, \quad a_{i_k} \in \mathbb{C}(z(x), \partial_x z(x)).$$

Esta situación se presenta, por ejemplo, para ecuaciones diferenciales lineales dadas por

$$\partial_x^{2n} y + a_{n-1}(x)\partial_x^{2n-2} y + \ldots + a_2(x)\partial_x^4 y + a_1(x)\partial_x^2 y + a_0(x)y = 0.$$

Finalmente, el algoritmo de la algebrización dado en el teorema 2.16 puede ser extendido de manera natural a cualquier ecuación diferencial de la forma

$$F(\partial_x^n y, \partial_x^{n-1} y, \dots, \partial_x y, y, e^{\mu t}) = 0,$$

lo cual sucede a través del cambio de variable Hamiltoniano racional $z = e^{\mu x}$ y por lo tanto es transformada en la ecuación diferencial

$$\widehat{F}(\widehat{\partial}_z^n \widehat{y}, \widehat{\partial}_z^{n-1} \widehat{y}, \dots, \widehat{\partial}_z \widehat{y}, y, z) = 0.$$

De forma particular, consideraremos la algebrización de la Ecuación de Riccati, sistemas y ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. A continuación presentamos algunos ejemplos para ilustrar estos hechos.

Ejemplo.

1. La ecuación diferencial

$$\mathcal{L} := \partial_x^2 y + (-2e^x - 1)\partial_x y + e^{2x} y = 0$$

   con el cambio de variable Hamiltoniano $z = e^x$, $\sqrt{\alpha} = z$, $\widehat{a} = -2z - 1$ y $\widehat{b} = z^2$ se transforma en la ecuación diferencial

$$\widehat{\mathcal{L}} := \partial_z^2 \widehat{y} - 2\partial_z \widehat{y} + \widehat{y} = 0,$$

la cual se puede resolver de una manera sencilla por tener coeficientes constantes. Una base de soluciones para $\mathcal{L}$ y $\widehat{\mathcal{L}}$ están dadas por $\langle e^z, ze^z\rangle$ y $\langle e^{e^x}, e^x e^{e^x}\rangle$ respectivamente. Además, $K = \mathbb{C}(e^x)$, $\widehat{K} = \mathbb{C}(z)$, L y $\widehat{L}$ son las extensiones de Picard-Vessiot de $\mathcal{L}$ y $\widehat{\mathcal{L}}$ respectivamente. De esta forma, $G(L/K) = G(\widehat{L}/\widehat{K})$.

2. La ecuación diferencial

$$\mathcal{L} := \partial_x^2 y + \frac{-24e^x - 25}{4e^x + 5}\partial_x y + \frac{20e^x}{4e^x + 5} y = 0$$

con el cambio de variable Hamiltoniano $z = e^x$, $\sqrt{\alpha} = z$,

$$\widehat{a} = \frac{-24z - 25}{4z + 5} \text{ and } \widehat{b} = \frac{20z}{4z + 5}$$

es transformada en la ecuación diferencial

$$\widehat{\mathcal{L}} := \partial_z^2 \widehat{y} + \frac{-20(z+1)}{x(4z+5)}\partial_z \widehat{y} + \frac{20}{z(4z+5)}\widehat{y} = 0,$$

la cual puede ser resuelta usando el *algoritmo de Kovacic*. Una base de soluciones para $\widehat{\mathcal{L}}$ es $\langle z+1, z^5\rangle$, por lo tanto una base de soluciones de la ecuación diferencial $\mathcal{L}$ es $\langle e^x + 1, e^{5x}\rangle$. Además, $K = \mathbb{C}(e^x)$, $\widehat{K} = \mathbb{C}(z)$, L y $\widehat{L}$ son las extensiones de Picard-Vessiot de las ecuaciones diferenciales $\mathcal{L}$ y $\widehat{\mathcal{L}}$ respectivamente. En consecuencia, $G(L/K) = G(\widehat{L}/\widehat{K}) = e$.

Teorema 2.18. (Algebrización de la Ecuación de Riccati) *La Ecuación de Riccati*

$$\partial_x v = a(x) + b(x)v + c(x)v^2 \tag{2.5}$$

a través del cambio de variable Hamiltoniano $z = z(x)$, se transforma en la Ecuación de Riccati

$$\partial_z \widehat{v} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\widehat{a}(z) + \widehat{b}(z)\widehat{v} + \widehat{c}(z)\widehat{v}^2), \tag{2.6}$$

donde $v(x) = \widehat{v}(z(x))$, $\widehat{a}(z(x)) = a(x)$, $\widehat{b}(z(x)) = b(x)$, $\widehat{c}(z(x)) = c(x)$ y $\sqrt{\alpha(z(x))} = \partial_x z(x)$. Además, si $\sqrt{\alpha}$, $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c} \in \mathbb{C}(x)$, la ecuación (2.6) *es la algebrización de la ecuación* (2.5).

Demostración. Se aplica directamente la definición de $\widehat{\partial}_z$. □

Ejemplo. Consideremos la ecuación de Riccati

$$\mathcal{L} := \partial_x v = \left(\tanh x - \frac{1}{\tanh x}\right) v + \left(3\tanh x - 3\tanh^3 x\right) v^2,$$

la cual a través del cambio de variable Hamiltoniano $z = \tanh x$, que conduce a $\sqrt{\alpha} = 1 - z^2$, es transformada en la ecuación de Riccati

$$\widehat{\mathcal{L}} := \partial_z v = -\frac{1}{z} v + 3zv^2.$$

Una solución para la ecuación $\widehat{\mathcal{L}}$ es

$$-\frac{1}{z(3z-c)}, \text{ siendo } c \text{ una constante,}$$

así que la correspondiente solución para la ecuación $\mathcal{L}$ es

$$-\frac{1}{\tanh x(3\tanh x - c)}.$$

El siguiente resultado es la versión algebrizada de la relación entre los anillos diferenciales propios de sistemas y operadores diferenciales.

Teorema 2.19. *Consideremos los cuerpos diferenciales K, $\widehat{K}$ y los sistemas $[A]$ y $[\widehat{A}]$ dados por*

$$\partial_x \mathbf{X} = -A\mathbf{X},\ \widehat{\partial}_z \widehat{\mathbf{X}} = -\widehat{A}\widehat{\mathbf{X}},\ \widehat{\partial}_z = \sqrt{\alpha}\partial_z,\ A = [a_{ij}],\ \widehat{A} = [\widehat{a}_{ij}],$$

$a_{ij} \in K$, $\widehat{a}_{ij} \in \widehat{K}$, donde $z = z(x)$, $\mathbf{X}(x) = \widehat{\mathbf{X}}(z(x))$, $\widehat{a}_{ij}(z(x)) = a_{ij}(x)$, entonces $\mathcal{E}(A) \simeq \mathcal{E}(\widehat{A})$. En particular, si consideramos las ecuaciones diferenciales lineales

$$\mathcal{L} := \partial_x^n y + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \partial_x^k y = 0 \quad y \quad \widehat{\mathcal{L}} := \widehat{\partial}_z^n \widehat{y} + \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{a}_k \widehat{\partial}_z^k \widehat{y} = 0,$$

donde $z = z(x)$*,* $y(x) = \widehat{z}((x))$*,* $\widehat{a}_k(z(x)) = a_k(x)$*,* $a_k \in K$*,* $\widehat{a}_k \in \widehat{K}$*, entonces* $\mathcal{E}(\mathfrak{L}) \simeq \mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{L}})$*, donde* $\mathcal{L} := \mathfrak{L}y = 0$ *y* $\widehat{\mathcal{L}} := \widehat{\mathfrak{L}}\widehat{y} = 0$*. Además, asumiendo*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathcal{E}(\mathfrak{L}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} p_{1k}\partial_x^{k-1} : \partial_x P = PA - AP,\, p_{ik} \in K \right\},$$

si y solo si

$$\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{L}}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \widehat{p}_{1k}\widehat{\partial}_z^{k-1} : \widehat{\partial}_z \widehat{P} = \widehat{P}\widehat{A} - \widehat{A}\widehat{P},\, \widehat{p}_{ik} \in \widehat{K} \right\}.$$

Demostración. En virtud del teorema 2.17 se tiene que

$$K \simeq \widehat{K}, \quad \mathcal{E}(A) \simeq \mathcal{E}(\widehat{A}) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}(\mathfrak{L}) \simeq \mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{L}}).$$

Usando la derivación $\widehat{\partial}_z$ y por inducción sobre el teorema 2.15 completamos la demostración. □

Ejemplo. Consideramos dos ejemplos diferentes para para ilustrar el teorema 2.19.

- Consideremos la ecuación diferencial

  $$\mathcal{L}_1 := \partial_x^2 y - (1 + \cos x - \cos^2 x)y = 0.$$

  Mediante el cambio de variable Hamiltoniano $z = z(x) = \cos x$, con $\sqrt{\alpha} = -\sqrt{1-z^2}$, la ecuación diferencial $\mathcal{L}_1$ se transforma en la ecuación diferencial

  $$\widehat{\mathcal{L}}_1 := \partial_z^2 \widehat{y} - \frac{z}{1-z^2}\partial_z \widehat{y} - \frac{1+z-z^2}{1-z^2}\widehat{y} = 0.$$

  Ahora, calculando el anillo diferencial propio de $\widehat{\mathfrak{L}}_1$ tenemos que $\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{L}}_1) = \mathrm{Vect}(1)$, por lo tanto el anillo diferencial propio de $\mathfrak{L}_1$ es dado por $\mathcal{E}(\mathfrak{L}_1) = \mathrm{Vect}(1)$.

- Consideremos ahora la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}_2 := \partial_x^2 y = \left(e^{2x} + \frac{9}{4}\right) y.$$

Mediante el cambio de variable Hamiltoniano $z = e^x$, con $\sqrt{\alpha} = x$, la ecuación diferencial $\mathcal{L}_2$ se transforma en la ecuación diferencial

$$\widehat{\mathcal{L}}_2 := \partial_z^2 \widehat{y} + \frac{1}{z}\partial_z \widehat{y} - \left(1 + \frac{9}{4x^2}\right)\widehat{y} = 0.$$

Ahora bien, calculando el anillo diferencial propio del operador diferencial $\widehat{\mathfrak{L}}_2$ tenemos que

$$\mathcal{E}(\widehat{\mathfrak{L}}_2) = \mathrm{Vect}\left(1, -2\left(\frac{z^2-1}{z^2}\right)\partial_z - \frac{z^2-3}{z^3}\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(1, -2\left(\frac{z^2-1}{z^3}\right)\widehat{\partial}_z - \frac{z^2-3}{z^3}\right),$$

por lo tanto el anillo diferencial propio del operador $\mathfrak{L}_2$ está dado por

$$\mathcal{E}(\mathfrak{L}_2) = \mathrm{Vect}\left(1, -2\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}}\right)\partial_x - \frac{e^{2x}-3}{e^{3x}}\right).$$

El mismo resultado se obtiene a través del formalismo matricial, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{2x} + \frac{9}{4} & 0 \end{pmatrix}, \ \widehat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z^2 + \frac{9}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_x P = PA - AP, \ \widehat{\partial}_z \widehat{P} = \widehat{P}\widehat{A} - \widehat{A}\widehat{P},$$

con $P \in Mat(2, \mathbb{C}(e^x))$ y $\widehat{P} \in Mat(2, \mathbb{C}(z))$. $\square$

Darboux en la página 210 de su libro *Teoría de superficies* plantea la transformación que a continuación se enuncia como teorema

Teorema 2.20. (Darboux) *Supongamos que la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (\phi(x) + h)\, u \tag{2.7}$$

tiene por solución particular a $f(x)$ para $h = h_1$, entonces la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(f\left(\frac{1}{f}\right)'' + h - h_1 \right) y \tag{2.8}$$

es $y = u' - u\frac{f'}{f}$ para $h \neq h_1$.

Ejemplo.

- Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} = hy.$$

En este caso $\phi(x) = 0$. Si $h_1 = 0$, $h_2 = -1$ entonces $f(x) = x$ es una solución para $h = h_1$ y $u(x) = \sin x$ es una solución para $h = h_2$ entonces la solución general de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\left(\frac{1}{x}\right)'' - 1 \right) y$$

es

$$y = \cos x - \frac{1}{x}\sin x$$

- Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (x^2 + h)y.$$

En este caso $\phi(x) = x^2$. Si $h_1 = 1$, $h_2 = 3$ entonces $f(x) = \exp(\frac{x^2}{2})$ es una solución para $h = h_1$ y $u(x) = x\exp(\frac{x^2}{2})$ es una solución para $h = h_2$ entonces la solución general de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)'' + 2 \right) y$$

es

$$y = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

De ahora en adelante, por facilidad, utilizaremos la ecuación

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \left(2\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{f''}{f} + h_2 - h_1\right) y \tag{2.9}$$

en lugar de la ecuación (2.8).

Para finalizar esta sección presentaremos el siguiente resultado.

Teorema 2.21. *Todo sistema de la forma*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

con coeficientes en un cuerpo diferencial K es equivalente a la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\ddot{\xi} - \left(a(t) + d(t) + \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}\right)\dot{\xi} - \left(\dot{a}(t) + b(t)c(t) - a(t)d(t) - \frac{a(t)\dot{b}(t)}{b(t)}\right)\xi = 0,$$

donde $\xi := \xi_1$ y $\xi_2 = (\dot{\xi} - a(t)\xi)/b(t)$.

2.3 El algoritmo de Kovacic y la ecuación de Riemann

En 1986 Jerald Kovacic presenta un algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes funciones racionales sobre los complejos. El algoritmo de Kovacic se basa en los invariantes y semi-invariantes del Teorema 2.8.

La idea del algoritmo es ver que la EDLR caiga en el caso 1, si no es así, se busca que caiga en el caso 2, si tampoco es así, se busca que caiga en el caso 3. Si definitivamente la EDLR no cae en los casos 1 , 2 o 3, entonces obligatoriamente cae en el caso 4.

Por el orden de r en infinito, $\circ(r_\infty)$, se entenderá el orden de infinito como un cero de r. Esto indica que si $r = \frac{s}{t}$, $s, t \in \mathbb{C}[x]$, entonces $\circ(r_\infty) = grad(t) - grad(s)$. Se denotará por Γ' al conjunto finito de polos de r, $\Gamma' = \{c \in \mathbb{C} : t(c) = 0\}$, de tal forma que $\Gamma = \Gamma' \cup \{\infty\}$. Se denotará por $\circ(r_c)$ el orden del polo $c \in \Gamma'$. Para aplicar el caso 1 del algoritmo se requiere que todo polo de r (en caso de existir) sea de orden par o de orden 1, mientras que obligatoriamente $\circ(r_\infty) \in \{2n : n \in \mathbb{Z}^-\} \cup \{n \geq 2 : n \in \mathbb{Z}\}$, si en este caso existe una solución para la EDLR, ésta es de la forma $y = Pe^{\int \omega}$, donde P y ω se construyen con los pasos del algoritmo. Para aplicar el caso 2, se requiere que exista al menos un polo $c \in \Gamma'$ tal que $\circ(r_c) \in \{2n+1 : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{2\}$. Para aplicar el caso 3, es necesario que para todo polo $c \in \Gamma'$, $\circ(r_c) \in \{1, 2\}$, y $\circ(r_\infty) \in \{n \geq 2, n \in \mathbb{Z}\}$. Si al aplicar el caso 2 o el caso 3 existe una solución para la EDLR, ésta es de la forma $y = e^{\int \omega}$, donde ω se construye con los pasos del algoritmo. El caso 4 se da cuando no se dan los casos 1, 2 o 3, indicando que la EDLR no tiene soluciones liouvillianas. Se puede afirmar que al escoger aleatoriamente una EDLR, la probabilidad de que ésta sea soluble por cuadraturas es muy pequeña. Los pocos casos en donde se dan este tipo de soluciones, se obtienen mediante el algoritmo de Kovacic.

Caso 1. Este caso, como ya se mencionó, corresponde a la solubilidad por cuadraturas de la ecuación de Riccatti. Por tal razón, la serie de Laurent de $\sqrt{r}$ en cada polo c, $[\sqrt{r}]_c$, y en el infinito, $[\sqrt{r}]_\infty$, forman parte esencial en el desarrollo del algoritmo para este caso y son funciones racionales. Para hacer más divulgativo este artículo se utilizarán fracciones parciales y cuadrados de polinomios en lugar de series de Laurent, aunque en esencia es lo mismo. Adicionalmente se definen $\alpha_c^+, \alpha_c^-, \alpha_\infty^+, \alpha_\infty^- \in \mathbb{C}$, de acuerdo a la situación presentada. Ahora, si $p \in \Gamma$, entonces $\varepsilon(p) \in \{+, -\}$.

Paso 1. Buscar para cada polo $c \in \Gamma'$ y para ∞ la situación correspondiente a cada una de las que siguen:

(c_1) Si $\circ(r_c) = 1$, entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_c = 0, \quad \alpha_c^\pm = 1.$$

(c_2) Si $\circ(r_c) = 2$, $r = \cdots + b(x-c)^{-2} + \cdots$, entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_c = 0, \quad \alpha_c^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}.$$

(c_3) Si $\circ(r_c) = 2v \geq 4$,

$$r = (a\,(x-c)^{-v} + ... + d\,(x-c)^{-2})^2 + b(x-c)^{-(v+1)} + \cdots,$$

entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_c = a\,(x-c)^{-v} + ... + d\,(x-c)^{-2}, \quad \alpha_c^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} + v\right).$$

(∞_1) Si $\circ(r_\infty) > 2$, entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^{+} = 0, \quad \alpha_\infty^{-} = 1$$

(∞_2) Si $\circ(r_\infty) = 2$, $r = \cdots + b(x)^2 + \cdots$, entonces

$$\left[\sqrt{r}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}$$

(∞_3) Si $\circ(r_\infty) = -2v \leq 0$, $r = (ax^v + ... + d)^2 + b(x)^{v-1} + \cdots$, entonces $[\sqrt{r}]_\infty = ax^v + ... + d$ y $\alpha_\infty^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} - v\right)$.

Paso 2. Encontrar $D \neq \emptyset$ definido como

$$D = \left\{ d \in \mathbb{Z}_+ : d = \alpha_\infty^{\varepsilon(\infty)} - \sum_{c\in\Gamma'} \alpha_c^{\varepsilon(c)}, \forall\left(\varepsilon\left(p\right)\right)_{p\in\Gamma} \right\}.$$

Si $D = \emptyset$, entonces el caso 1 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe pasarse inmediatamente al caso 2. Ahora, si $\#D > 0$, entonces para cada $d \in D$ se construye $\omega \in \mathbb{C}(x)$ tal que

$$\omega = \varepsilon\left(\infty\right)\left[\sqrt{r}\right]_\infty + \sum_{c\in\Gamma'}\left(\varepsilon\left(c\right)\left[\sqrt{r}\right]_c + \alpha_c^{\varepsilon(c)}(x-c)^{-1}\right).$$

Paso 3. Buscar un polinomio mónico P de grado d, para cada $d \in D$, tal que

$$P'' + 2\omega P' + (\omega' + \omega^2 - r)P = 0.$$

Si P no existe, entonces el caso 1 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe intentarse inmediatamente el caso 2. Ahora, si P existe, entonces una solución de la EDLR está dada por

$$y = Pe^{\int \omega},$$

donde ω se construye en el paso 2 mediante $d \in D$.

Si a una EDLR sólo se le puede aplicar el caso 1 del algoritmo de Kovacic entonces su grupo de Galois es conexo y está dado por:

1. $SL(2,\mathbb{C})$ si el algoritmo no provee ninguna solución,
2. $\mathbb{C}^* \propto \mathbb{C}$ si el algoritmo sólo provee una solución que no sea una extensión cuadrática en $\mathbb{C}(x)$,
3. $\mathbb{C}^*$ si el algoritmo provee las dos soluciones que no sean funciones racionales y ninguna sea el logaritmo de una función racional.
4. $\mathbb{C}$ si el algoritmo provee las dos soluciones: una función racional y el logaritmo de una función racional.
5. e si el algoritmo provee las dos soluciones y ambas sean funciones racionales.

A continuación, a manera ilustrativa, se presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo.

- Este es el ejemplo trivial puesto que

  $$z'' + (\lambda_1 + \lambda_2)z' + \lambda_1\lambda_2 z = 0$$

  se transforma en la EDLR

  $$y = \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4} - \lambda_1\lambda_2\right) y.$$

  Esta ecuación no tiene polos, así que cae en el caso 1. El orden del coeficiente de y en el infinito es 0, así que cae en (∞_3) y por lo tanto $b = v = 0$, de lo cual se concluye que $\alpha\pm = 0$. Esto indica que $D = \{0\} \neq \emptyset$, $P = 1$ y claramente una solución liouvilliana de la EDLR está dada por $y = e^{gx}$, donde g depende de λ_1 y λ_2. En este caso, el grupo de Galois de la EDLR es isomorfo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

- La ecuación diferencial
$$z'' + \frac{\alpha}{x}z' + \frac{\beta}{x^2}z = 0,$$
donde α y β son constantes, se conoce como la ecuación equidimensional de Cauchy-Euler o simplemente ecuación de Euler. La ecuación de Euler se transforma en la EDLR
$$y'' = \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha - 4\beta}{4x^2}\right) y.$$
Trivialmente se tiene que para
$$\beta = \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{4},$$
la EDLR queda reducida a $y'' = 0$. La cual es inmediatamente integrable por cuadraturas y sus soluciones liouvillianas están dadas por $y_1 = 1$, $y_2 = x$. Así que el grupo de Galois de la EDLR es la identidad y las soluciones de la ecuación de Euler están dadas por
$$z_1 = x^{\frac{-\alpha}{2}}, \quad z_2 = x^{\frac{-\alpha+2}{2}}.$$
En el otro caso,
$$\beta \neq \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{4},$$
se tiene un polo de orden 2 en $x = 0$ y en $x = \infty$. Esto indica que la solución de la ecuación de Euler puede caer en cualquiera de los tres primeros casos, siendo siempre integrable para valores arbitrarios de α y β. Un caso particular que corresponde al caso 1 está dado por
$$m(m+1) = \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 4\beta}{4} \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}.$$
La EDLR queda
$$y'' = \left(\frac{m(m+1)}{x^2}\right) y,$$
por lo tanto $\alpha_\infty^+ = 1$, $\alpha_\infty^- = 0$, $\alpha_0^+ = m+1$, $\alpha_0^- = -m$. Los posibles elementos del conjunto D están dados por:
$$\alpha_\infty^+ - \alpha_0^- = m+1 \qquad \alpha_\infty^- - \alpha_0^- = m$$
$$\alpha_\infty^+ - \alpha_0^+ = -m \qquad \alpha_\infty^- - \alpha_0^+ = -m,$$

de lo cual se tiene que para $m > 0$, $D = \{m, m+1\}$, mientras que para $m < 0$, $D = \{-m, -m-1\}$. Tomando $d = m+1$ y aplicando el paso 3 se obtiene la solución

$$y = Pe^{\int \omega} = x^{m+1}.$$

La otra solución está dada por

$$y = x^{-m}.$$

Claramente se observa que el grupo de Galois de la EDLR es el grupo identidad.

- La ecuación diferencial $xy'' - xy' - y = 0$ se transforma en la EDLR

$$y'' = ry, \quad r = \frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{x+4}{4x}.$$

Por lo tanto $\circ r_0 = 1$, $\circ r_\infty = 0$ que corresponde a (c_1, ∞_3), así que

$$\left[\sqrt{r}\right]_0 = 0, \quad \alpha_0^+ = \alpha_0^- = 1, \quad \left[\sqrt{r}\right]_\infty = \frac{1}{2}, \quad \alpha_\infty^+ = -\alpha_\infty^- = 1.$$

Ahora bien, el único elemento de D está dado por $d = \alpha_\infty^+ - \alpha_0^+ = 0$, así que el polinomio mónico es $P = 1$,

$$\omega = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, \quad \omega' = -\frac{1}{x^2}, \quad \omega^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{4}.$$

por tanto se tiene

$$M = \omega' + \omega^2 - r = 0.$$

El polinomio $P = 1$ satisface $P'' + 2\omega P' + MP = 0$ y por lo tanto una solución de la EDLR es

$$y_1 = xe^{\frac{x}{2}}.$$

La segunda solución de la EDLR es

$$y_2 = xe^{\frac{x}{2}} \int \frac{dx}{x^2 e^x}.$$

Como el algoritmo solo dió una solución, el grupo de Galois de la EDLR es $G = G^0 \approx \mathbb{C}^* \propto \mathbb{C}$, el cual no es un grupo conmutativo.

Caso 2. Tal como se mencionó anteriormente, al descartar el caso 1, debe buscarse que r tenga al menos un polo de orden 2 o de orden impar mayor que la unidad (1).

Paso 1. Buscar $E_c \neq \emptyset$ y $E_\infty \neq \emptyset$. Para cada $c \in \Gamma'$ se define $E_c \subset \mathbb{Z}$ como sigue:

(c_1) Si $\circ\,(r_c) = 1$, entonces $E_c = \{4\}$

(c_2) Si $\circ\,(r_c) = 2$, $r = \cdots + b(x-c)^{-2} + \cdots$, entonces

$$E_c = \left\{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\right\}.$$

(c_3) Si $\circ\,(r_c) = v > 2$, entonces $E_c = \{v\}$

Para ∞ se define $E_\infty \subset \mathbb{Z}$ como sigue:

(∞_1) Si $\circ\,(r_\infty) > 2$, entonces $E_\infty = \{0, 2, 4\}$

(∞_2) Si $\circ\,(r_\infty) = 2$, $r = \cdots + b(x)^2 + \cdots$, entonces

$$E_\infty = \left\{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\right\}.$$

(∞_3) Si $\circ\,(r_\infty) = v < 2$, entonces $E_\infty = \{v\}$

Paso 2. Encontrar $D \neq \emptyset$ definido como

$$D = \left\{ d \in \mathbb{Z}_+ : \quad d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma'} e_c\right), \forall e_p \in E_p,\ p \in \Gamma \right\}.$$

Si $D = \emptyset$, entonces el caso 2 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe pasarse inmediatamente al caso 3. Ahora, si $\#D > 0$, entonces para cada $d \in D$ se construye una función racional θ definida como

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma'} \frac{e_c}{x-c}.$$

Paso 3. Buscar un polinomio mónico P de grado d, para cada $d \in D$, tal que

$$P''' + 3\theta P'' + (3\theta' + 3\theta^2 - 4r)P' + \left(\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r'\right) P = 0.$$

Si P no existe, entonces el caso 2 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe intentarse inmediatamente el caso 3. Ahora, si P existe, se establece

$$\phi = \theta + \frac{P'}{P}$$

y se busca ω tal que

$$\omega^2 - \phi\omega + \left(\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - r\right) = 0,$$

entonces una solución de la EDLR está dada por

$$y = e^{\int \omega},$$

donde ω es solución del polinomio anterior.

- Dada la ecuación diferencial

$$y'' = ry, \quad r = \frac{1}{x} - \frac{3}{16x^2} = \frac{16x - 3}{16x^2}.$$

Se observa que $\circ r_0 = 2$ y $\circ r_\infty = 1$, por tal razón esta EDLR no cae en el caso 1. Ahora bien, por el paso 1 del caso 2 se tiene que esta EDLR cae en (c_2, ∞_3), luego

$$b = -\frac{3}{16}, \quad E_0 = \left\{2 + k\sqrt{1 - 4\left(\frac{3}{16}\right)}\right\} = \{1, 2, 3\}, \quad v = 1, \quad E = \{1\},$$

por lo tanto los candidatos a elementos del conjunto D son

$$\frac{1}{2}(1-1) = 0 \in \mathbb{Z}_+, \quad \frac{1}{2}(1-2) = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_+, \quad \frac{1}{2}(1-3) = -1 \notin \mathbb{Z}_+,$$

y de esta forma $D = \{0\}$. El único candidato a polinomio mónico de grado 0 es $P = 1$ y la función racional θ está dada por $\theta = \frac{1}{2x}$. Ahora bien, $P' = P'' = P''' = 0$, luego

$$\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r' = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{4x^3} + \frac{1}{8x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{8x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{4x^3} = 0.$$

Así que que efectivamente $P = 1$ es el polinomio buscado. El paso siguiente es buscar ϕ tal que

$$\phi = \theta + \frac{P'}{P} = \frac{1}{2x},$$

luego se busca ω que satisfaga la siguiente ecuación cuadrática

$$\omega^2 - \phi\omega + \left(\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - r\right) = \omega^2 - \frac{1}{2x}\omega + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{x} = 0,$$

las soluciones de ω están dadas por

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{4}{x}}}{2} = \frac{1}{4x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Por tanto, hay dos soluciones para la EDLR dadas por

$$y_1 = e^{\int \frac{1}{4x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{4}} e^{2\sqrt{x}}, \qquad y_2 = e^{\int \frac{1}{4x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{x}}.$$

Finalmente, el grupo de Galois de la EDLR es el grupo multiplicativo y por lo tanto su componente conexa es abeliana.

Caso 3. Tal como se mencionó anteriormente, al descartar el caso 2, debe buscarse que todo polo de r tenga a lo mas orden 2 y el orden de r en ∞ debe ser al menos 2. Este es el caso más complicado debido a que se requieren muchos cálculos.

Paso 1. Buscar $E_c \neq \emptyset$ y $E_\infty \neq \emptyset$. Para cada $c \in \Gamma'$ se define $E_c \subset \mathbb{Z}$ como sigue:
(c_1) Si $\circ(r_c) = 1$, entonces $E_c = \{12\}$
(c_2) Si $\circ(r_c) = 2$, $r = \cdots + b(x-c)^{-2} + \cdots$, entonces

$$E_c = \left\{6 + k\sqrt{1+4b} : \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\right\}.$$

Para ∞ se define $E_\infty \subset \mathbb{Z}$ como sigue:
(∞) Si $\circ(r_\infty) = v \geq 2$, $r = \cdots + b(x)^2 + \cdots$, entonces

$$E_\infty = \left\{6 + \frac{12k}{n}\sqrt{1+4b} : \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\right\}, \quad n \in \{4, 6, 12\}.$$

Paso 2. Encontrar $D \neq \emptyset$ definido por

$$D = \left\{ d \in \mathbb{Z}_+ : \quad d = \frac{n}{12}\left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma'} e_c \right), \forall e_p \in E_p,\ p \in \Gamma \right\}.$$

Primero debe utilizarse $n = 4$ hasta que el algoritmo proporcione la respuesta o falle, luego $n = 6$ y $n = 12$. Si $D = \emptyset$, entonces el caso 3 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe pasarse inmediatamente al caso 4. Ahora, si $\#D > 0$, entonces para cada $d \in D$ con su respectivo n, se construye una función racional

$$\theta = \frac{n}{12} \sum_{c \in \Gamma'} \frac{e_c}{x - c}$$

y un polinomio S definido como

$$S = \prod_{c \in \Gamma'} (x - c).$$

Paso 3. Buscar un polinomio mónico P de grado d, para cada $d \in D$, tal que sus coeficientes estén determinados por la recurrencia

$$P_{-1} = 0, \quad P_n = -P,$$

$$P_{i-1} = -SP_i' - \left((n-i)\, S' - S\theta\right) P_i - (n-i)\,(i+1)\, S^2 r P_{i+1},$$

donde $i \in \{0, 1 \ldots, n-1, n\}$. Si P no existe, entonces el caso 3 del algoritmo de Kovacic no se tiene y debe pasarse inmediatamente el caso 4. Ahora, si P existe, se busca ω tal que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{S^i P}{(n-i)!} \omega^i = 0,$$

entonces una solución de la EDLR está dada por

$$y = e^{\int \omega},$$

donde ω es solución del polinomio anterior, el cual es de grado n. Si se logra determinar ω con $n = 4$, entonces el grupo de Galois de la EDLR es el grupo tetraedro, si se determina con $n = 6$ es el grupo octaedro y con $n = 12$ es el grupo icosaedro.

El tercer caso es el más complicado, puesto que al final se deben resolver ecuaciones polinómicas de grado 4, 6 o 12. Estos cálculos son muy grandes y se requiere la ayuda del computador.

Caso 4. Si no se obtienen soluciones liouvillianas por cualquiera de los casos anteriores, entonces el algoritmo de Kovacic no puede determinar las soluciones de la EDLR. Es decir, el grupo de Galois de la EDLR es exactamente $SL(2,\mathbb{C})$.

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = r\eta, \quad r = \frac{5-72x}{16x^2(x-1)^2} = -\frac{67}{16(x-1)^2} + \frac{31}{8(x-1)} + \frac{5}{16x^2} - \frac{31}{8x}.$$

Por el paso 1 se tiene que $\Gamma = \{0, 1, \infty\}$, $\circ(r_0) = \circ(r_1) = 2$, $\circ(r_\infty) = 3$. Esto indica que la EDLR puede caer en cualquiera de los tres primeros casos (c_2, ∞_1).

Primero se analiza el caso 1: $s = 5 - 72x$, $t = 16x^2(x-1)^2$, por lo tanto se tiene que $r = \frac{s}{t} = -\frac{67}{16(x-1)^2} + \frac{31}{8(x-1)} + \frac{5}{16x^2} - \frac{31}{8x}$, $\Gamma = \{0, 1, \infty\}$, $\circ(r_0) = \circ(r_1) = 2$, y $\circ(r_\infty) = \deg t - \deg s = 3$. Es claro que esta EDLR cae dentro del caso 1, (c_2, ∞_1), por (∞_1) se tiene que $\alpha_\infty^+ = 0$ y $\alpha_\infty^- = 1$. Ahora, por (c_2) se tiene que para el polo $x = 1$, $b = \frac{-67}{16}$, mientras que para $x = 0$, $b = \frac{5}{16}$ y esto implica que $[\sqrt{r}]_{1,0} = 0$ y $\alpha_{1,0}^\pm \notin \mathbb{R}$, por lo tanto $D = \emptyset$. De la misma se hace para los otros 2 casos y se concluye que $D = \emptyset$ y por lo tanto la EDLR cae en el caso 4, indicando que no tiene soluciones liouvillianas.

Definición 2.8. La *Ecuación de Riemann* es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden sobre la esfera de Riemann, la cual tiene a lo sumo tres singularidades regulares. Asumiendo a, b y c como *puntos singulares regulares*, la Ecuación de Riemann puede ser escrita en la forma

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^2 y + p(x)\partial_x y + q(x)y = 0,\\
&\quad p(x) = \frac{1-\rho-\rho'}{x-a} + \frac{1-\sigma-\sigma'}{x-b} + \frac{1-\tau-\tau'}{x-c},\\
&q(x) = \frac{\rho\rho'(a-b)(a-c)}{(x-a)^2(x-b)(x-c)} + \frac{\sigma\sigma'(b-a)(b-c)}{(x-b)^2(x-a)(x-c)} +\\
&\frac{\tau\tau'(c-a)(c-b)}{(x-c)^2(x-a)(x-b)},
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

donde (ρ,ρ'), (σ,σ') y (τ,τ') son los exponentes asociados a los puntos singulares regulares a, b, c respectivamente y deben satisfacer la relación de Fuchs $\rho+\rho'+\sigma+\sigma'+\tau+\tau'=1$. Las cantidades $\rho'-\rho$, $\sigma'-\sigma$ y $\tau'-\tau$ son llamados *diferencia de exponentes* de la Ecuación de Riemann (2.10) en a, b y c respectivamente; y serán denotados por $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\mu}$ y $\widetilde{\nu}$ tal como sigue:

$$\widetilde{\lambda} = \rho'-\rho, \quad \widetilde{\mu} = \sigma'-\sigma, \quad \widetilde{\nu} = \tau'-\tau.$$

El conjunto completo de soluciones de la Ecuación de Riemann (2.10) es denotado por el símbolo

$$y = P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \rho & \sigma & \tau & x \\ \rho' & \sigma' & \tau' & \end{matrix}\right\}$$

y se nombra como *Función P de Riemann.*

Ahora se describe brevemente el Teorema de Kimura, el cual nos da las condiciones suficientes y necesarias para la integrabilidad de la ecuación diferencial de Riemann.

Teorema 2.22. (Kimura) *La ecuación diferencial de Riemann* (2.10) *es integrable si y solo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

(i) Al menos uno de los cuatro números $\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}+\widetilde{\nu}$, $-\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}+\widetilde{\nu}$, $\widetilde{\lambda}-\widetilde{\mu}+\widetilde{\nu}$, $\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}-\widetilde{\nu}$ *es un entero par.*

(ii) Los números $\widetilde{\lambda}$ *(o* $-\widetilde{\lambda}$*),* $\widetilde{\mu}$ *(o* $-\widetilde{\mu}$*) y* $\widetilde{\nu}$ *(o* $-\widetilde{\nu}$*) pertenecen (en orden arbitrario) a algunas de las siguientes quince familias.*

1	$1/2+l$	$1/2+m$	*número complejo arbirtrario*	
2	$1/2+l$	$1/3+m$	$1/3+q$	
3	$2/3+l$	$1/3+m$	$1/3+q$	$l+m+q$ *par*
4	$1/2+l$	$1/3+m$	$1/4+q$	
5	$2/3+l$	$1/4+m$	$1/4+q$	$l+m+q$ *par*
6	$1/2+l$	$1/3+m$	$1/5+q$	
7	$2/5+l$	$1/3+m$	$1/3+q$	$l+m+q$ *par*
8	$2/3+l$	$1/5+m$	$1/5+q$	$l+m+q$ *par*
9	$1/2+l$	$2/5+m$	$1/5+q$	$l+m+q$ *par*
10	$3/5+l$	$1/3+m$	$1/5+q$	$l+m+q$ *par*
11	$2/5+l$	$2/5+m$	$2/5+q$	$l+m+q$ *par*
12	$2/3+l$	$1/3+m$	$1/5+q$	$l+m+q$ *par*
13	$4/5+l$	$1/5+m$	$1/5+q$	$l+m+q$ *par*
14	$1/2+l$	$2/5+m$	$1/3+q$	$l+m+q$ *par*
15	$3/5+l$	$2/5+m$	$1/3+q$	$l+m+q$ *par*

Donde l, m, q son números enteros.

Usando la *transformación de Möebius*, también conocida como sustitución homográfica, en la ecuación de Riemann (2.10), podemos trasladar los puntos $x = a, b, c$ a los puntos $x' = a', b', c'$, respectivamente:

$$x' = \frac{px+q}{rx+s}.$$

En particular, podemos ubicar las singularidades $x = a, b, c$ en en $x = 0, 1, \infty$ para obtener la siguiente Ecuación de Riemann:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 y + \left(\frac{1-\rho-\rho'}{x} + \frac{1-\sigma-\sigma'}{x-1} \right) \partial_x y \qquad\qquad (2.11) \\ + \left(\frac{\rho\rho'}{x^2} + \frac{\sigma\sigma'}{(x-1)^2} + \frac{\tau\tau' - \rho\rho'\sigma\sigma'}{x(x-1)} \right) y = 0, \end{aligned}$$

donde el conjunto de soluiciones está dado por la función P de Riemman

$$y = P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \rho & \sigma & \tau & x \\ \rho' & \sigma' & \tau' & \end{array} \right\}.$$

Algunas veces es muy útil trasladar los puntos $x = 0, 1, \infty$ a los puntos

$x' = -1, 1, \infty$ en la ecuación de Riemann's (2.11), por ejemplo, estableciendo $\rho = 0$, podemos tener la siguiente relación:

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & \sigma & \tau & x \\ \frac{1}{2} & \sigma' & \tau' & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} -1 & 1 & \infty & \\ \sigma & \sigma & 2\tau & \sqrt{x} \\ \sigma' & \sigma' & 2\tau' & \end{array}\right\}.$$

Podemos transformar la ecuación diferencial (2.11) a la *Ecuación Hipergeométrica de Gauss* tal como sigue:

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \rho & \sigma & \tau & x \\ \rho' & \sigma' & \tau' & \end{array}\right\} = x^{\rho}(x-1)^{\sigma} P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \kappa & x \\ 1-\gamma & \gamma-\kappa-\beta & \beta & \end{array}\right\},$$

donde $\kappa = \rho + \sigma + \tau$, $\beta = \rho + \sigma + \tau'$ y $\gamma = 1 + \rho - \rho'$. Entonces

$$y = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \kappa & x \\ 1-\gamma & \gamma-\kappa-\beta & \beta & \end{array}\right\},$$

es el conjunto de soluciones de la Ecuación Hipergeométrica de Gauss

$$\partial_x^2 y + \frac{(\gamma - (\kappa + \beta + 1)x)}{x(1-x)}\partial_x y - \frac{\kappa\beta}{x(1-x)} y = 0, \qquad (2.12)$$

donde la relación de Fuchs se satisface trivialmente y las diferencias de exponentes están dados por

$$\widetilde{\lambda} = 1 - \gamma, \quad \widetilde{\mu} = 1 - \gamma - \beta, \quad \widetilde{\nu} = \beta - \kappa.$$

Tal como podemos ver, la estructura Galoisiana de la Ecuación de Riemann no cambia con la Transformación de Möebius.

La *Ecuación Hipergeométrica confluente* es una forma degenerada de la Ecuación Hipergeométrica donde dos de los tres puntos singulares regulares se unen para transformarse en un punto singular irregular. Por ejemplo, llevando el punto 1 al punto ∞ en una forma adecuada, la Ecuación Hipergeométrica (2.12) tiene las dos formas clásicas conocidas

- La forma de *Kummer*

$$\partial_x^2 y + \frac{c - x}{x}\partial_x y - \frac{a}{x} y = 0 \qquad (2.13)$$

- La forma de *Whittaker*

$$\partial_x^2 y = \left(\frac{1}{4} - \frac{\kappa}{x} + \frac{4\mu^2 - 1}{4x^2}\right) y \tag{2.14}$$

donde los parámetros de las dos ecuaciones están relacionados como sigue: $\kappa = \frac{c}{2} - a$ y $\mu = \frac{c}{2} - \frac{1}{2}$. Además, usando el teorema 2.9 con $n = 2$, podemos ver que la Ecuación de Whittaker está en la forma reducida de la Ecuación de Kummer. La estructura Galoisiana de estas ecuaciones es bien conocida debido a los trabajos de Martinet & Ramis y Duval & Loday-Richaud.

Teorema 2.23. **(Martinet & Ramis)** *La ecuación diferencial de Whittaker* (2.14) *es integrable si y solo si solo una de las siguientes condiciones se satisfacen:*

- $\kappa + \mu \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$,
- $\kappa - \mu \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$,
- $-\kappa + \mu \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$, *o*
- $-\kappa - \mu \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$.

La *Ecuación de Bessel* es un caso particular de la ecuación Hipergeométrica confluente y está dada por

$$\partial_x^2 y + \frac{1}{x}\partial_x y + \frac{x^2 - n^2}{x^2} y = 0. \tag{2.15}$$

Usando la transformación del teorema 2.9 para $n = 2$, la forma reducida de la ecuación de Bessel es un caso particular de la ecuación de Whittaker. Por lo tanto llegamos al siguiente resultado, el cual es bien conocido.

Corolario 2.2. *La ecuación diferencial de Bessel* (2.15) *es integrable si y solo si* $n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

La integrabilidad de la Ecuación de Bessel, cuando el parámetro es un semi-entero, es un resultado muy conocido y se debe a Daniel Bernoulli.

La siguiente ecuación diferencial se conoce como *Ecuación de Airy*:

$$\partial_x^2 y' = xy, \tag{2.16}$$

la cual solo tiene una singularidad, que es de tipo irregular, en $x = \infty$. La ecuación de Airy (2.16) se transforma en la Ecuación de Bessel con parámetro $n = 1/3 \notin \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, el cual claramente no es un semi-entero, lo cual significa que de esta ecuación de Bessel no es integrable y por lo tanto concluimos que la Ecuación de Airy (2.16) no es integrable.

Al hacer doble confluencia en la Ecuación Hipergeométrica (2.12), llevando los puntos "0 y 1 a ∞ en una forma adecuada, se tiene la *Ecuación del cilindro parabólico* (también conocida como la *Ecuación de Weber*):

$$\partial_x^2 y = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} - n\right) y, \tag{2.17}$$

la cual es integrable si y solo si $n \in \mathbb{Z}$. Si hacemos $n = \frac{b^2-c}{2a} - \frac{1}{2}$ y el cambio de variable $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{a}}(ax+b)$, tenemos la *forma de Rehm* de la Ecuación de Weber:

$$\partial_x^2 y = \left(ax^2 + 2bx + c\right) y, \quad a \neq 0, \tag{2.18}$$

así que $\frac{b^2-c}{a}$ es un entero par.

La Ecuación Hipergeométrica, incluyendo confluencias, es caso particular de la ecuación diferencial

$$\partial_x^2 y + \frac{L}{Q}\partial_x y + \frac{\lambda}{Q} y, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad L = a_0 + a_1 x, \quad Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2. \tag{2.19}$$

Los *polinomos ortogonales clásicos* y los *polinomios de Bessel* son soluciones de la ecuación diferencial (2.19).

2.4 Ejercicios

1. Sea L/K siendo $K = \mathbb{C}$ y $y'' = 0$. Demuestre que $G(L/K) \approx (\mathbb{C}, +)$.

2. Sea L/K siendo $K = \mathbb{C}(x)$ y $y'' = (x^4 - 2x)y$. Demuestre que $G(L/K)$ es triangularizable, conexo y no abeliano, y que no existe solución algebraica para dicha ecuación diferencial.

3. Sean L/K y M/F tales que $K = \mathbb{C}(x)$ y $F = \mathbb{C}(e^x)$. Demuestre que $G(L/K) \approx G(M/F)$.

4. Demuestre que si $r(x) \in \mathbb{C}[x]$ y es de grado impar, entonces $G(L/\mathbb{C}(x)) = SL(2, \mathbb{C})$.

5. Sea L/K siendo $K = \mathbb{C}$ y $y'' + y = 0$. Demuestre que $G(L/K) \approx (\mathbb{C}^*, *)$. ¿El resultado se mantiene para $K = \mathbb{C}(x)$? Justifique su respuesta.

6. Demuestre en detalle la transformación de $z'' + az' + bz = 0$ a $y'' = ry$ y el corolario 2.1.

7. Aplique el Algoritmo de Kovacic a la ecuación $y'' = \left(x^2 + \frac{6}{x^2} - 5\right)$.

8. Aplique la Algebrización a la ecuación $y'' = \left(\frac{\sinh x}{1+\cosh x}\right) y$

9. Aplique la transformación de Darboux a $y'' = -k^2 y$ para $k = 1, 2, 3$.

10. Encuentre un sistema lineal $X' = AX$, donde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}(x))$ y $TrA \neq -2x$, que sea equivalente a $y'' + 2xy' + 5y = 0$.

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DINÁMICOS

En este capítulo se aplicarán los conceptos y resultados de los capítulos anteriores. Este capítulo está dividido en tres secciones: Campos Vectoriales Polinomiales, Sistemas Hamiltonianos y Ecuación de Schrödinger.

Para la primera sección empezaremos mencionando que Darboux en 1878 con su trabajo estudió la posible relación entre las curvas algebraicas y las integrales primeras para sistemas diferenciales polinomiales en el plano. En particular, él probó que si un sistema admite un número suficiente de curvas entonces se puede construir una función *tipo Darboux* usando tales curvas. La función en mención juega el papel de *factor integrante* del sistema y su existencia es muy importante en el problema de *centro–foco*. Un resultado importante sobre la teoria de Darboux es debido a Michael Singer, experto también en Teoría de Galois Diferencial. Singer probó que el método de Darboux permite calcular las integrales primeras Liouvillianas de sistemas diferenciales polinomiales. Esta sección se basa en las referencias [11, 13], en donde hacemos énfasis en los campos vectoriales polinomiales transformables a ecuaciones de Riccati para luego estudiarlos a través de la Teoría de Galois Diferencial.

Para la segunda sección consideraremos la teoría de Galois en el contexto de los sistemas dinámicos, conocida como teoría de Morales-Ramis. En la tesis doctoral de Juan J. Morales-Ruiz *Técnicas algebraicas para la no integrabilidad de Sistemas Hamiltonianos* (1989), supervisada por Carles Simó, se aplicó por primera vez la Teoría de Galois diferencial en la no integrabilidad de un sistema hamiltoniano, sin embargo simultáneamente, Churchill y Rod obtuvieron resultados parecidos. Mas tarde, gracias a una estancia postdoctoral de Morales-Ruiz en Francia y trabajando con Jean Pierre Ramis se gesta lo que hoy se conoce como *teoría de Morales-Ramis* (1998). Sin embargo, la teoría de Morales-Ramis tuvo como antecedentes los trabajos de Poincaré, Kovalewskaya, Painlevé y Ziglin. En 1982 Ziglin utiliza la estructura de la ecuación en variaciones de Poincaré (sobre una curva integral particular) como una herramienta fundamental para detectar la no integrabilidad de un sistema Hamiltoniano. Esta sección se basa en las referencias [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

La tercera sección corresponde a las aplicaciones de la teoría de Galois diferencial en mecánica cuántica. En particular se presenta la integrabilidad de las ecuaciones de Schrödinger con potenciales que son invariantes bajo la transformación de Darboux, conocidos como *Potenciales invariantes de forma.* Los resultados presentados aquí corresponden a mi tesis de doctorado y artículos derivados de ésta, en donde se estudia la integrabilidad en sentido Galoisiano de la ecuación de estacionaria y no relativista de Schrödinger, ver [1, 2, 12]. Recientemente hemos obtenidos resultados Galoisianos en integrabilidad de ecuaciones diferenciales parciales, los cuales no fueron presentados en el curso de la EMALCA 2014 y tampoco se presentarán en estas notas, pero el lector interesado puede consultar las referencias [10, 16, 17].

3.1 Campos vectoriales polinomiales

La teoría de integrabilidad Darboux funciona para ecuaciones diferenciales ordinarias polinomiales complejas (y por supuesto en particular para las reales). Consideramos el *sistema diferencial polinomial* en $\mathbb{C}^2$ definido por

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x,y), \tag{3.1}$$

con $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$ y la variable independiente t puede ser real o compleja.

En lo siguiente denotamos por δA el *grado del polinomio* A. Definimos $m = \max\{\delta P, \delta Q\}$ el *grado* del sistema (3.1).

Asociamos al sistema diferencial polinomial (3.1) en $\mathbb{C}^2$ el *campo vectorial polinomial*

$$X = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.2}$$

y algunas veces escribimos $X = (P, Q)$.

Recordemos que una variedad algebraica es un polinomio en varias variables y las curvas algebraicas, punto de partida de la teoría de integrabilidad Darboux, son los ceros de las variedades algebraica. Por ejemplo $P(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ es una variedad algebraica y la curva algebraica corresponde a los puntos sobre la circunferencia unidad, es decir $P(x,y) = 0$.

Definición 3.1. Una curva algebraica irreducible $f(x,y) = 0$ en $\mathbb{C}^2$ con $f \in \mathbb{C}[x,y]$ es una *curva algebraica invariante* del sistema polinomial (3.1) si

$$\dot{f}|_{f=0} = 0 \quad \text{o} \quad Xf = \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q = Kf, \tag{3.3}$$

para algún polinomio $K \in \mathbb{C}[x,y]$ denominado el *cofactor* de la curva $f = 0$.

En la definición 3.1 notamos que debido a que el campo vectorial polinomial tiene grado m, entonces cualquier cofactor tiene como máximo grado a $m-1$ (y es independiente del grado de la curva $f = 0$). Esto reduce el problema de calcular curvas invariantes de un sistema dado de un problema de algebra lineal al espacio de los cofactores.

Observamos que para los puntos de la curva $f = 0$ el lado derecho de (3.3) es cero. Esto significa que el gradiente $(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y)$ es ortogonal al campo vectorial (P, Q) en esos puntos. Sin embargo el campo vectorial (P, Q) es tangente a la curva $f = 0$. De aquí se tiene que la curva $f = 0$ es formada por trayectorias del campo vectorial (P, Q). Esto explica el por qué la curva algebraica $f = 0$ es invariante bajo el flujo del campo vectorial (P,Q).

Los sistemas polinomiales reales son muy especiales porque cuando tengan una curva algebraica invariante compleja, también tendrán como invariante la conjugada.

Definición 3.2. Una *integral primera* del campo vectorial asociado al sistema (3.1) sobre un subconjunto abierto U de $\mathbb{C}^2$ es una función analítica no constante $H : U \to \mathbb{C}$ la cual es constante sobre toda curva solución $(x(t), y(t))$ de (3.1) sobre U.

Lo que la definición 3.2 afirma es que $H\,(x(t), y(t)) = c$ donde $c \in \mathbb{C}$ para todo tiempo t para el cual la solución $(x(t), y(t))$ está definida sobre U. De (3.2) tenemos que H es una integral primera en U si y sólo si $XH \equiv 0$ sobre U. Decimos que el campo vectorial polinomial (3.1) es *integrable* sobre U si existe una integral primera sobre U.

Definición 3.3. Un *invariante* del campo vectorial polinomial real asociado a (3.1) definido en el subconjunto abierto U de $\mathbb{C}^2$ es una función analítica no constante I en las variables x, y y t tales que $I(x(t), y(t), t)$ es constante sobre toda curva solución $(x(t), y(t))$ del sistema (3.1) contenida en U.

Para un campo vectorial polinomial la existencia de una integral primera $H(x, y)$ implica que trazando las curvas $H(x, y) = c$ podemos describir completamente el retrato de fases de tal sistema. Mientras, la existencia de un invariante nos dará información sobre el α–límite o el ω–límite de las órbitas del sistema, donde el tiempo t es real.

Definición 3.4. Una función analítica $R : U \to \mathbb{C}$ la cual no es idénticamente cero sobre U se denomina un *factor integrante* del sistema (3.1) si satisface

$$XR = -\mathrm{div}(X)R,$$

en U.

De la definición 3.4 se tiene que, como es usual, la *divergencia* del campo vectorial X está definida por $\mathrm{div}(X) = \mathrm{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$. Supongamos que U es simplemente conexo, entonces la integral primera asociada al factor integrante R es dada por

$$H(x,y) = \int R(x,y)P(x,y)dy + f(x), \tag{3.4}$$

satisfaciendo la condición $\frac{\partial H}{\partial x} = -RQ$.

A partir de la definición 3.4, tenemos que $X(R) = -\text{div}(P,Q)R$. Esto implica que $R = 0$ es una curva invariante (en general no algebraica) de X teniendo como cofactor el polinomio $-\text{div}(P,Q)$. En general, es más fácil buscar una expresión para el *factor integrante inverso*

$$V = \frac{1}{R} : W \to \mathbb{C} \quad \text{con} \quad W = U \setminus \{R = 0\},$$

que una expresión para el factor integrante de la integral primera.

Otra noción útil en la teoría de integrabilidad Darboux es la noción de factor exponencial, la cual se debe a Colin Christopher.

Ejemplo. El sistema polinomial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= (1+\epsilon)y + x, \end{aligned} \tag{3.5}$$

para $\epsilon \neq 0$ tiene dos curvas invariantes: $f_1 = x = 0$ con cofactor $K_1 = 1$ y $f_2 = x + \epsilon y = 0$ con cofactor $K_2 = 1 + \epsilon$. Nótese que $\epsilon \to 0$ implica que las dos curvas se colapsan en una. En este caso decimos que la curva $f_1 = 0$ tiene multiplicidad 2.

Definición 3.5. Sean $h, g \in \mathbb{C}[x,y]$ primos relativos en el anillo $\mathbb{C}[x,y]$. La función $\exp(g/h)$ se denomina un *factor exponencial* del sistema polinomial (3.1) si para algún polinomio $K \in \mathbb{C}[x,y]$ de grado a lo sumo $m-1$ satisface la ecuación

$$X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = K \exp\left(\frac{g}{h}\right). \tag{3.6}$$

Decimos que K es el *cofactor* del factor exponencial $\exp(g/h)$.

Teorema 3.1. *Si* $\exp(g/h)$ *es un factor exponencial con cofactor* K *para el sistema polinomial* (3.1) *y si* h *no es una constante, entonces* $h = 0$ *es una curva algebraica invariante con cofactor* K_h*, y* g *satisface la ecuación* $Xg = gK_h + hK$.

Debemos notar que los factores exponenciales de la forma $\exp(g/h)$ (res-pectivamente $\exp(g)$) aparecen cuando la curva algebraica invariante $h = 0$ (respectivamente la recta invariante en el infinito cuando proyectivizamos el campo vectorial X) tiene multiplicidad geométrica más grande que 1.

En el ejemplo anterior notamos que cuando las curvas $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ se colapsan ($\epsilon = 0$) aparece el factor exponencial $\exp(y/x)$ con cofactor $K = 1$.

La existencia de puntos singulares mejora la versión original del Teorema de Darboux (Teorema 3.2), el cual se verá mas adelante.

Denotamos por $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ el espacio de todos los polinomios complejos de grado $m - 1$ y también notamos que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{m-1}[x, y] = m(m + 1)/2$. Sea

$$K(x, y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}_{m-1}[x, y].$$

Consideramos el isomorfismo

$$K \longrightarrow (a_{00},\ a_{10},\ a_{01}, \ldots,\ a_{m-1,0},\ a_{m-2,1}, \ldots,\ a_{0,m-1}),$$

es decir, identificamos el espacio vectorial lineal $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ con $\mathbb{C}^{m(m+1)/2}$.

Definición 3.6. Decimos que r puntos singulares $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$, para $k = 1, \ldots, r$, del sistema polinomial real (3.1), son puntos singulares *independientes* con respecto a $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ si la intersección de los r hiperplanos

$$\sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij} x_k^i y_k^j = 0, \qquad k = 1, \ldots, r,$$

en $\mathbb{C}^{m(m+1)/2}$, es un subespacio lineal de dimensión $[m(m + 1)/2] - r$.

Definición 3.7. Un punto singular (x_0, y_0) del sistema polinomial (3.1) es *débil* si cumple la condición $\operatorname{div}(P, Q)(x_0, y_0) = 0$.

La presentación de la teoría de integrabilidad Darboux puede ser resumida en el Teorema 3.2 y hasta lo que sabemos, es la versión más reciente. Esta versión es original sobre los invariantes generalizados. Las otras afirmaciones son bien conocidas.

El siguiente teorema será mencionado como el *Método de Darboux*.

Teorema 3.2. (Método de Darboux) *Supongamos que el sistema polinomial* (3.1) *de grado* m *admite* p *curvas algebraicas invariantes irreducibles* $f_i = 0$ *con cofactores* K_i *para* $i = 1, \ldots, p$; q *factores exponenciales* $F_j = \exp(g_j/h_j)$ *con cofactores* L_j *para* $j = 1, \ldots, q$; *y* r *puntos singulares independientes* $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$ *tales que* $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ *para* $i = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots r$. *Por supuesto, toda* h_j *factoriza en producto de factores* $f_1, \cdots, f_q$, *excepto si es igual a* 1. *Entonces las siguientes afirmaciones se mantienen.*

(a) *Existen* $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ *no todas cero tales que*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_j L_j = 0, \qquad (D_{fi})$$

si y sólo si la función (multivaluada)

$$H(x, y) = f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \ldots F_q^{\mu_q}, \qquad (3.7)$$

es una integral primera del sistema (3.1). *Más aún, para sistemas reales la función* (3.7) *es real.*

(b) *Si* $p + q + r = [m(m + 1)/2] + 1$, *entonces existen* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ *no todas cero satisfaciendo la condición* (D_{fi}).

(c) *Si* $p + q + r \geq [m(m + 1)/2] + 2$, *entonces el sistema* (3.1) *tiene una integral primera racional, y en consecuencia todas las órbitas del sistema están contenidas en curvas algebraicas invariantes.*

(d) *Existen* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ *no todas cero tales que*

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q}\mu_j L_j + \mathrm{div}(P,Q) = 0, \qquad (D_{if}),$$

si y sólo si la función (3.7) *es un factor integrante del sistema* (3.1). *Más aún, para sistemas reales la función* (3.7) *es real.*

(e) *Si* $p+q+r = m(m+1)/2$ *y los* r *puntos singulares independientes son débiles, entonces existen* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ *no todas cero satisfaciendo al menos una de las condiciones* (D_{fi}) *o* (D_{if}).

(f) *Existen* $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ *no todas cero tales que*

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q}\mu_j L_j + s = 0, \qquad (D_{in})$$

con $s \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, *si y sólo si la función (multivaluada)*

$$I(x,y,t) = f_1^{\lambda_1}\cdots f_p^{\lambda_p}F_1^{\mu_1}\cdots F_q^{\mu_q}\exp(st) \qquad (3.8)$$

es un invariante del sistema (3.1). *Más aún, para sistemas reales esta función es real.*

Sea V *un factor integrante inverso* C^1 *definido sobre un subconjunto abierto* W *de* $\mathbb{C}^2$.

(g) *Existen* $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$ *no todas cero tales que*

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q}\mu_j L_j + \rho\,\mathrm{div}(P,Q) + s = 0, \qquad (D_{gin})$$

con $s \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *y* $\rho \in \mathbb{C}$ *si y sólo si la función (multivaluada)*

$$G(x,y,t) = V^{\rho} f_1^{\lambda_1}\cdots f_p^{\lambda_p}F_1^{\mu_1}\cdots F_q^{\mu_q}\exp(st), \qquad (3.9)$$

es un invariante del sistema (3.1) *y se denominará invariante generalizado. Más aún, para sistemas reales esta función es real.*

(h) *Si* $p+q=[m(m+1)/2]-1$*, entonces existen* $\lambda_i,\mu_i\in\mathbb{C}$ *no todos cero satisfaciendo al menos una de las condiciones* (D_{fi})*,* (D_{if})*,* (D_{in}) *o* (D_{gin})*.*

Definición 3.8. Una función de la forma

$$f_1^{\lambda_1}\cdots f_p^{\lambda_p}\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)^{\mu_1}\cdots\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)^{\mu_q}, \tag{3.10}$$

se denomina una *función de Darboux.* Si el sistema (3.1) tiene una integral primera o un factor integrante de la forma (3.10) entonces el sistema (3.1) se denomina *Darboux integrable.*

Denotemos por K_0 las integrables polinomiales, K_1 las integrales racionales, K_2 las integrales de Darboux (factor integrante $R=\frac{U}{V}$, $N=1$), K_3 las integrales elementales ($R=\left(\frac{U}{V}\right)^N$), K_4 las integrales Liouvillianas ($R=\prod f_i^{\lambda_i}\exp(g_i/h_i)$), y por K_5 otros tipos de integrales. De esta forma se tiene la siguiente relación

$$K_0\subset K_1\subset K_2\subset K_3\subset K_4\subset K_5.$$

Los siguientes son algunos resultados conocidos en la teoría de integrabilidad Darboux.

- **Prelle y Singer (1983).** Si H es una integral primera elemental, entonces su factor integrante es

  $$R=\left(\frac{U}{W}\right)^{1/N},\quad U,V\in\mathbb{C}[x,y],\quad N\in\mathbb{Z}_+.$$

  Es decir, integrales primeras elementales se pueden calcular a partir de funciones Darbouxianas.

- **Singer (1992).** Si H es Liouvilliana, entonces R es Darbouxiana. Es decir, integrales Liouvillianas son integrales de funciones Darbouxianas.

- **Llibre y Pantazi en 2004.** Si H es Darbouxiana, entonces

$$R \in \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} f_i f_i^{n_i}}, \frac{U(x,y)}{\prod_{i=1}^{p} f_i f_i^{n_i}} \right\}.$$

Uno de los problemas mas difíciles relacionados con la existencia de las curvas invariantes y la integrabilidad de un sistema se debe a Poincaré:

- **Poincaré (1891)**. Dar un algoritmo efectivo para calcular el grado máximo de las curvas invariantes algebraicas de un campo fijado.

- **Jouanolou (1979)**. Para un campo dado, el máximo grado de las f_i (irreducibles) es acotado. El campo tiene o bien un número finito de curvas o tiene una integral primera racional (todas las órbitas del sistema están contenidas sobre curvas algebraicas.

- **Chavarriga y Llibre en (2001)**. Si la curva $f = 0$ es no singular, entonces $\delta f \leq \delta X - 1$.

- **Carnicer & Campillo, Cerveau & Lins Neto**. Otras cotas sobre el grado de la curva.

Se pensaba que cuando los sistemas de grado δX tuviesen una curva de grado arbitrario, tendrían también una integral primera racional, como indica el ejemplo siguiente.

Ejemplo. (Integral primera racional) El sistema

$$\dot{x} = \nu x, \quad \dot{y} = \mu y, \quad \nu, \mu \in \mathbb{Z}_+$$

tiene la curva invariante $x^\mu - \alpha y^\nu = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, y la integral primera $H = \frac{y^\nu}{x^\mu}$, lo cual indica que H es una integral racional.

En esta dirección hay el siguiente problema abierto:

Problema. *No se sabe si existe una cota uniforme del grado de las curvas algebraicas de todos los campos polinomiales que no son Darboux integrable.*

Para los Darboux integrables se sabe que no existe esta cota: Olagnier (2001), Christopher & Llibre (2002), Chavarriga & Grau (2003).

Giacomini, Llibre & Viano (1996), han relacionado la existencia del factor integrante con la presencia de los ciclos límites:

Teorema 3.3. *Sea $X \in C^1$ definido en un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, donde V es el inverso del factor integrante. Si γ es un ciclo límite de X contenido en $\mathcal{U}$, entonces*

$$\gamma \subset \Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U} : V(x, y) = 0\}.$$

El siguiente resultado es debido a Ecalle (1992) e Ilyanshenko (1991).

Teorema 3.4. *Cualquier campo polinomial tiene un número finito de ciclos límites.*

Llibre y Rodríguez (2000) obtuvieron el siguiente resultado, el cual corresponde a una de las preguntas abiertas de Hilbert.

Teorema 3.5. *Toda configuración finita de ciclos límites se puede realizar con campos polinomiales.*

En virtud del Teorema 3.5 y resultados de los problemas inversos, Llibre y Pantazi demostraron que la siguiente conjetura, planteada por Winkel, es falsa.

Conjetura. *Para una curva dada (algebraica) $f = 0$ de grado $\delta f >= 4$ no existen campos polinomiales X de grado $\delta X \leq 2\delta f - 1$ tales que tengan $f = 0$ invariante y que tengan exactamente los óvalos de $f = 0$ como ciclos límites.*

Considerando la curva

$$f = f(x, y) = \frac{1}{4} + x - x^2 + px^3 + xy + x^2y^2 = 0 \ , \tag{3.11}$$

de grado $\delta f = 4$ $(0 < p < 1/4)$ que tiene tres componentes: un óvalo y dos componentes homeomorfas a rectas. Además la curva $f = 0$ es no singular.

En el Teorema 3.6 se demuestra que el óvalo de la curva (3.11) es el único ciclo límite para una familia 13–paramétrica de campos polinomiales. Se observa que $2\delta X - 1 = 7 > 5$ y esto demuestra que la conjetura no es cierta.

Teorema 3.6. (Familia 6–paramétrica) *Sean a, b, c, d, e y p números reales arbitrarios. Entonces, la curva algebraica $f = 0$ definida por (3.11) es invariante por la familia 6–paramétrica de los campos vectoriales polinómicos de grado 5 dados por*

$$\begin{aligned} P \;=\;& (be - cd) + [c + 4(be - cd) - 2a(d^2 + e^2)]x - by + \\ & 4[c + (a + c)d - be]x^2 - 4[b + cd - (a + b)e]xy - \\ & 2[a + 2c + 2p(cd - be)]x^3 + 4[b + c - a(d^2 + e^2)]x^2 y - \\ & 2(a + 2b)xy^2 + 4cp\,x^4 + 4(2ad - bp)x^3 y - \\ & 4(cd - 2ae - be)x^2 y^2 - 4ax^4 y + 4cx^3 y^2 - 4(a + b)x^2 y^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q \;=\;& 2a(d^2 + e^2) - bd - ce + [b - 4((a + b + ad)d + (c + ae)e)]x + \\ & [c + 2a(d^2 - 2e + e^2)]y - 4(-c + ad + bd - 2ae + ce)xy + \\ & 2[a + 2b + 2d(2a + b) + 2ce + 3ap(d^2 + e^2)]x^2 + 2a(1 - 2e)y^2 - \\ & 4(a + b + 3adp + bdp + cep)x^3 + 2(a + 2b - 2c - 6aep)x^2 y + \\ & 4(-a + c + ad^2 + ae^2)xy^2 + 2ay^3 + \\ & 2(3a + 2b)p\,x^4 + 4cp\,x^3 y - 2(4ad + 2bd + 2ce - 3ap)x^2 y^2 - \\ & 8aexy^3 + 4(a + b)x^3 y^2 + 4cx^2 y^3 + 4axy^4. \end{aligned}$$

Adicionalmente, si $ac \neq 0$, $0 < p < 1/4$ y el punto (d, e) está al interior de la región acotada limitada por el óvalo de la $f = 0$, entonces el único ciclo límite de este campo es el algebraico definido por el óvalo de la curva $f = 0$.

Ahora nos ocuparemos del estudio de los campos vectoriales polinomiales asociados a ecuaciones de Riccati.

Consideremos el campo polinomial

$$\begin{aligned}\dot{v} = \frac{dv}{dt} &= S_0(x) + S_1(x)v + S_2(x)v^2,\\ \dot{x} = \frac{dx}{dt} &= S_3(x),\end{aligned}$$

con $S_0, S_1, S_2, S_3 \in \mathbb{C}[x]$. La foliación asociada a este campo es una ecuación de Riccati, como las consideradas en el capítulo 2. En particular, podemos considerar $S_3(x) = N(x)$, $S_2(x) = -N(x), S_1(x) = 0$ y $S_0(x) = T(x)$, lo cual nos conduce al campo vectorial polinomial

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= T(x) - N(x)v^2,\\ \frac{dx}{dt} &= N(x),\end{aligned} \tag{3.12}$$

de grado $m = \max\{\delta T(x),\, \delta N(x){+}2\}$. Notamos que la foliación asociada al sistema (3.12) está dada por

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{T(x)}{N(x)} - v^2. \tag{3.13}$$

Del capítulo anterior sabemos que la ecuación de Riccati (3.13) se transforma en la ecuación diferencial lineal reducida

$$y'' = \frac{T(x)}{N(x)}y,$$

mediante el cambio de variable

$$v = (\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Consideremos ahora los campos vectoriales polinomiales

$$X := (T - Nv^2)\frac{\partial}{\partial v} + N\frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.14}$$

y

$$X_r := \left(\frac{T}{N} - v^2\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.15}$$

Los campos vectoriales polinomiales (3.14) y (3.15) son algebraicamente equivalentes, ambos están asociados al sistema (3.12) y a la ecuación de Riccati (3.13), compartiendo los mismos elementos de la integrabilidad Darbouxiana (integrales primeras, cofactores, curvas invariantes, etc..). Sin embargo, son dinámicamente distintos, un campo es polinomial y el otro es racional.

En el siguiente teorema se presentan los elementos de la integrabilidad Darbouxiana para los campos vectoriales polinomiales (3.14) y (3.15).

Teorema 3.7. *Sean $y_1(x)$ una solución de la ecuación diferencial*

$$Ny'' - Ty = 0, \quad T, N \in \mathbb{C}[x]$$

y $v_1(x)$ la derivada logarítmica de $y_1(x)$. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones

- *Un curva invariante para los campos vectoriales X y X_r está dada por*
$$f(v,x) = -v + v_1(x)$$
con cofactor
$$K(v,x) = -v - v_1(x).$$

- *Un factor exponencial para los campos vectoriales X y X_r está dado por*
$$F(v,x) = e^{\int v_1(x)dx} = cy_1(x), \quad c \in \mathbb{C},$$
con cofactor
$$L(v,x) = v_1(x).$$

- *Un factor integrante de Darboux generalizado para los campos vectoriales X y X_r está dado por*
$$R(v,x) = \frac{e^{-2\int v_1(x)}}{(-v + v_1(x))^2}.$$

Demostración. Notemos que $v_1(x)$ es una solución de la ecuación de Riccati (3.13). Probaremos cada afirmación de acuerdo a cada item.

- Mediante cálculos directos, usando la definición 3.1, se prueba que los campos vectoriales polinomiales (3.14) y (3.15) tienen la curva invariante
$$f(v,x) = -v + v_1(x)$$
con cofactor
$$K(v,x) = -v - v_1(x).$$
Notemos que la curva f is polinomial en la variable v, pero no necesariamente es polinomial en la variable x.

- Mediante cálculos directos, usando la definición 3.5, se prueba que los campos vectoriales polinomiales (3.14) y (3.15) admiten el factor exponencial
$$F(v,x) = e^{\int v_1(x)dx} = cy_1(x), \quad c \in \mathbb{C}(x)$$
con cofactor
$$L(v,x) = v_1(x).$$

- Notemos que tanto el campo vectorial polinomial (3.14) como el campo vectorial polinomial (3.15), tienen divergencia
$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{div}(X_r) = -2v.$$
Por lo tanto se tiene que
$$-2K - 2L + \operatorname{div}(X) = -2K - 2L + \operatorname{div}(X_r) = -2K - 2L - 2v = 0.$$
Similarmente, por el item (b) del teorema 3.2 se concluye que
$$\frac{1}{R} = f^2F^2,$$
por lo tanto
$$R = \frac{1}{f^2F^2},$$
es un factor integrante de los campos vectoriales polinomiales (3.14) y (3.15). □

Un hecho importante es que la teoría de Picard-Vessiot, en particular, el algoritmo de Kovacic, provee información sobre la naturaleza de las integrales primeras y factores integrantes de campos vectoriales asociados a la ecuación $v' = r(x) - v^2$ desde el conocimiento de sus soluciones v_1, v_2, v_3. Más precisamente, a partir de los tres casos integrables del algoritmo de Kovacic obtenemos los siguientes tipos de integrales primeras.

Teorema 3.8. *Consideremos la ecuación de Riccati $v' = r(x) - v^2$ y $v_1(x)$ una solución algebraica. El factor integrante se obtiene como*

$$R_1 = \frac{e^{-2\int v_1(x)dx}}{(-v + v_1(x))^2} = \frac{1}{y_1^2(x)(-v + v_1(x))^2}, \quad v_1 = \frac{y_1'}{y_1}. \tag{3.16}$$

Además, de acuerdo al algoritmo de Kovacic se tienen los siguientes casos para integrales primeras:

C. 1: *Se tienen dos posibilidades:*

- *Si solamente $v_1 \in \mathbb{C}(x)$ entonces la integral primera $H(v, x)$ es del tipo Darboux–Schwarz–Christoffel.*
- *Si ambas soluciones $v_1, v_2 \in \mathbb{C}(x)$ entonces la integral primera $H(\emptyset, x)$ es del tipo Darboux. En particular, a partir del teorema 3.7 se construyen dos factores integrantes R_1 y R_2 y por lo tanto $H^2 = R_1/R_2$ es una integral primera de X. Así tendremos que*

$$H(v, x) = \frac{(-v + v_2(x))}{(-v + v_1(x))} e^{\int[(v_2(x) - v_1(x))dx]}.$$

C. 2: Si v_1 es una solución de un polinomio cuadrático en v, entonces una integral primera $H(v, x)$ es de tipo hiperelíptico.

C. 3: Si todas las soluciones v_1, v_2, v_3 son algebraicas sobre $\mathbb{C}(x)$, entonces X admite una integral primera racional.

Para ilustrar los teoremas anteriores se presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Consideremos el campo vectorial polinomial

$$X = -v^2 \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial x}.$$

Este campo proviene del sistema

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -v^2\\ \dot{x} &= 1\end{aligned}$$

y una foliación asociada a este campo es la ecuación de Riccati $v' = -v^2$, la cual se transforma en la ecuación diferencial de segundo orden $y'' = 0$, mediante el cambio de variable $v = (\ln y)'$. De esta forma tenemos como soluciones de ambas ecuaciones a

$$y = c_1 + c_2 x, \quad v = \frac{c_2}{c_1 + c_2 x}.$$

Esto nos conlleva a tener los siguientes elementos de la integrabilidad Darbouxiana del campo vectorial polinomial X.

- Curva invariante

$$f(v, x) = -v + \frac{c_2}{c_1 + c_2 x}$$

  con cofactor

$$K(v, x) = -v - \frac{c_2}{c_1 + c_2 x}.$$

- Factor exponencial

$$F(v, x) = c_1 + c_2 x$$

  con cofactor

$$L(v, x) = \frac{c_2}{c_1 x + c_2 x}.$$

- Factor integrante de Darboux generalizado

$$R(v, x) = \frac{1}{(c_1+c_2x)^2\left(-v+\frac{c_2}{c_1+c_2x}\right)}.$$

- Integral primera

$$H(v, x) = \frac{vx - 1}{v}.$$

Ejemplo. Consideremos el campo vectorial polinomial

$$X = \left(2 + x^2(1 - v^2)\right)\frac{\partial}{\partial v} + x^2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

Este campo proviene del sistema polinomial

$$\begin{aligned} \dot{v} &= 2 + (1 - v^2)x^2 \\ \dot{x} &= x^2 \end{aligned}$$

y una foliación asociada a este campo es la ecuación de Riccati

$$v' = 1 + \frac{2}{x^2} - v^2$$

la cual se transforma en la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) y, \quad v = (\ln y)'.$$

De esta forma tenemos como soluciones de ambas ecuaciones a

$$y = c_1 \frac{(x-1)\, e^x}{x} - c_2 \frac{(x+1)e^{-x}}{x}, \quad v = \frac{y'}{y}.$$

Esto nos conlleva a tener los siguientes elementos de la integrabilidad Darbouxiana del campo vectorial polinomial X, siendo

$$w(x) = \frac{c_1 e^x - c_2 e^{-x}}{c_1 e^x + c_2 e^{-x}}.$$

- Curva invariante

$$f(v,x) = -v + w(x) + \frac{w'(x) + \frac{1}{x^2}}{w(x) - \frac{1}{x}},$$

  con cofactor

$$K(v,x) = -v - w(x) - \frac{w'(x) + \frac{1}{x^2}}{w(x) - \frac{1}{x}}.$$

- Factor exponencial

$$F(v,x) = \left(c_1 e^x + c_2 e^{-x}\right) \left(w(x) - \frac{1}{x}\right).$$

  con cofactor

$$L(v,x) = w(x) + \frac{w'(x) + \frac{1}{x^2}}{w(x) - \frac{1}{x}}.$$

- Factor integrante de Darboux generalizado

$$R(v,x)=\frac{\left(c_1e^x+c_2e^{-x}\right)^{-2}}{\left(w(x)-\frac{1}{x}\right)^2\left(-v+w(x)+\frac{w'(x)+\frac{1}{x^2}}{w(x)-\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

- Integral primera

$$H(v,x)=\frac{x(x+1)(v+1)+1}{x(x-1)(v-1)-1}e^{-2x}.$$

Ejemplo. Consideremos el siguiente campo vectorial polinomial

$$X=\left(x^2-1-v^2\right)\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial x}.$$

Este campo proviene del sistema polinomial

$$\begin{aligned}\dot{v}&=x^2-1-v^2\\ \dot{x}&=1\end{aligned}$$

y una foliación asociada a este campo es la ecuación de Riccati

$$v'=x^2-1-v^2$$

la cual se transforma en la ecuación diferencial de segundo orden

$$y''=\left(x^2-1\right)y,\quad v=(\ln y)'.$$

Así tenemos como soluciones particulares de ambas ecuaciones a

$$y=e^{\frac{-x^2}{2}},\quad v=-x.$$

Esto nos conlleva a tener los siguientes elementos de la integrabilidad Darbouxiana del campo vectorial polinomial X.

- Curva invariante

$$f(v,x)=-v-x,$$

  con cofactor

$$K(v,x)=-v+x.$$

- Factor exponencial
$$F(v,x)=e^{\frac{-x^2}{2}}.$$
con cofactor
$$L(v,x)=-x.$$
- Factor integrante de Darboux generalizado
$$R(v,x)=\frac{e^{x^2}}{(v+x)^2}.$$
- La integral primera no tiene una expresión agradable puesto que involucra a la función *Error*. Además, la ecuación de Riccati solo tiene una solución racional y la ecuación de segundo orden asociada a ésta cae en el primer caso del algoritmo de Kovacic.

Ejemplo. Consideremos el siguiente campo vectorial polinomial
$$X=\left(x^4-5x^2+2-x^2v^2\right)\frac{\partial}{\partial v}+x^2\frac{\partial}{\partial x}.$$
Este campo proviene del sistema polinomial
$$\begin{aligned}\dot{v}&=x^4-5x^2+2-x^2v^2\\ \dot{x}&=x^2\end{aligned}$$
y una foliación asociada a este campo es la ecuación de Riccati
$$v'=x^2-5+\frac{2}{x^2}-v^2$$
la cual se transforma en la ecuación diferencial de segundo orden
$$y''=\left(x^2-5+\frac{2}{x^2}\right)y,\quad v=(\ln y)'.$$
Así tenemos como soluciones particulares de ambas ecuaciones a
$$y=x^2e^{\frac{-x^2}{2}},\quad v=\frac{2}{x}-x.$$
Esto nos conlleva a tener los siguientes elementos de la integrabilidad Darbouxiana del campo vectorial polinomial X.

- Curva invariante
$$f(v,x) = -v + \frac{2}{x} - x,$$
con cofactor
$$K(v,x) = -v - \frac{2}{x} + x.$$
- Factor exponencial
$$F(v,x) = x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}.$$
con cofactor
$$L(v,x) = \frac{2}{x} - x.$$
- Factor integrante de Darboux generalizado
$$R(v,x) = \frac{e^{x^2}}{x^4\left(v - \frac{2}{x} + x\right)^2}.$$
- La integral primera no tiene una expresión agradable puesto que involucra a la función *Error*. Además, la ecuación de Riccati solo tiene una solución racional y la ecuación de segundo orden asociada a ésta cae en el primer caso del algoritmo de Kovacic.

Ejemplo. Consideremos el siguiente campo vectorial polinomial
$$X = \left((1-v^2)x^2 - 6x + 6\right)\frac{\partial}{\partial v} + x^2\frac{\partial}{\partial x}.$$
Este campo proviene del sistema polinomial
$$\begin{aligned} \dot{v} &= (1-v^2)x^2 - 6x + 6 \\ \dot{x} &= x^2 \end{aligned}$$
y una foliación asociada a este campo es la ecuación de Riccati
$$v' = \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 - v^2$$
la cual se transforma en la ecuación diferencial de segundo orden
$$y'' = \left(\frac{6}{x^2} - \frac{6}{x} + 1\right)y, \quad v = (\ln y)'.$$

Así tenemos como soluciones particulares de ambas ecuaciones a

$$y = x^3 e^{-x}, \quad v = \frac{3}{x} - 1.$$

Esto nos conlleva a tener los siguientes elementos de la integrabilidad Darbouxiana del campo vectorial polinomial X.

- Curva invariante
  $$f(v, x) = -v + \frac{3}{x} - 1,$$
  con cofactor
  $$K(v, x) = -v - \frac{3}{x} + 1.$$
- Factor exponencial
  $$F(v, x) = x^3 e^{-x}.$$
  con cofactor
  $$L(v, x) = \frac{3}{x} - 1.$$
- Factor integrante de Darboux generalizado
  $$R(v, x) = \frac{e^{2x}}{x^6 \left(v - \frac{3}{x} + 1\right)^2}.$$
- La integral primera no tiene una expresión agradable puesto que involucra a la función *Error*. Además, la ecuación de Riccati solo tiene una solución racional y la ecuación de segundo orden asociada a ésta cae en el primer caso del algoritmo de Kovacic.

Como hemos mencionado, el estudio algebraico de campos vectoriales polinomiales no es una tarea fácil. Los ejemplos anteriores son casos conocidos en donde directamente la foliación del sistema cae en una ecuación de Riccati. Sin embargo, pueden haber otros campos polinomiales que después de varias transformaciones podamos llegar a una ecuación de Riccati de manera no trivial. Una pregunta, que aun sigue abierta, es el determinar las condiciones de los coeficientes del sistema

$$\begin{aligned} x' &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ y' &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \end{aligned}$$

donde $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$, para que el campo vectorial polinomial sea integrable. Éste es un problema muy difícil. Podemos dar condiciones sobre algunos coeficientes para ilustrar casos sencillos. En particular, el sistema que tiene una de las dos componentes sin parte cuadrática, el cual fue denominado por Llibre y Valls como sistema *lineal-cuadrático*. Este tipo de sistemas se puede reducir a las siguientes dos familias de sistemas: la primera es denota por (S1),

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x, \\ y' & = & \varepsilon x + \lambda y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \end{array} \tag{S1}$$

y la segunda es denotada por (S2),

$$\begin{array}{rcl} x' & = & y, \\ y' & = & \varepsilon x + \lambda y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{array} \tag{S2}$$

Los sistemas de tipo lineal-cuadrático admiten integrales primeras analíticas globalmente, en particular esto se tiene para:

(a_1) $b_{02} = \lambda = 0$.

(b_1) $b_{02} = 0$ y $\lambda = -p/q \in \mathbb{Q}^-$,

en el caso de los sistemas del tipo (S1) y

(a_2) $b_{20} = b_{02} = \lambda = 0$ y $\varepsilon b_{11} \neq 0$.

(b_2) $b_{20} = b_{11} = \lambda = 0$ y $\varepsilon b_{02} \neq 0$.

(c_2) $b_{11} = \lambda = 0$ y $b_{20} \neq 0$,

para los sistemas del tipo (S2).

En un trabajo reciente, en colaboración con J.T. Lázaro, Ch. Pantazi y J. J. Morales Ruiz, los resultados anteriores son obtenidos utilizando la teoría de Galois Diferencial. Comenzaremos con el caso (S1). De esta manera, consideramos la foliación asociada al sistema (S1):

$$\frac{dy}{dx} = (\varepsilon + b_{20}x) + \left(\frac{\lambda + b_{11}x}{x}\right) y + \frac{b_{02}}{x} y^2, \tag{3.17}$$

Como hemos visto en el capítulo 2, la ecuación de Riccati (3.17) se puede transformar en la ecuación de Riccati $w' = r(x) - w^2$, con

$$r(x) = \frac{1}{4} - \frac{\kappa}{x} + \frac{4\mu^2 - 1}{4x^2}, \quad \kappa = \frac{b_{02}\varepsilon + \frac{b_{11}}{2}(1-\lambda)}{\sqrt{b_{11}^2 - 4b_{20}b_{02}}}, \quad \mu = \frac{\lambda}{2}, \qquad (3.18)$$

siempre que $b_{11}^2 - 4b_{20}b_{02} \neq 0$. Notemos que la ecuación diferencial $\xi'' = r(x)\xi$ con r como en (3.18) es una ecuación de Whittaker, presentada en el capítulo 2, y por lo tanto podemos aplicar el teorema de Martinet-Ramis para establecer cuando nuestra ecuación de Whittaker es integrable. Es decir, una de las siguientes condiciones se debe satisfacer para que sea integrable:

$$\pm\kappa \pm \mu \in \frac{1}{2} + \mathbb{N},$$

o, equivalentemente (y más adecuada para la expresión derivada de κ y μ),

$$2(\kappa \pm \mu) \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

En nuestro caso estas conduciones significan

$$2(\kappa \pm \mu) = \frac{2b_{20}\varepsilon + b_{11}(1-\lambda)}{\sqrt{b_{11}^2 - 4b_{20}b_{02}}} \pm \lambda.$$

Notemos que el caso (a_1) en las ecuaciones del tipo (S1) corresponden a $2(\kappa \pm \mu) = 1 \in 2\mathbb{Z} + 1$ y el caso (b_1) a

$$2(\kappa + \mu) = \left(1 + \frac{p}{q}\right) + \left(\frac{-p}{q}\right) = 1 \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Consideremos ahora el caso de los sistemas del tipo (S2),

$$\begin{array}{rcl} x' & = & y, \\ y' & = & \varepsilon x + \lambda y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \end{array}$$

su foliación asociada está dada por

$$\frac{dy}{dx} = (\lambda + b_{11}x) + \left(\varepsilon x + b_{20}x^2\right)\frac{1}{y} + b_{02}y. \qquad (3.19)$$

De esta manera, la ecuación (3.19) cae en una de las siguientes situaciones:

(i) Si $\lambda = b_{11} = 0$, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \left(\varepsilon x + b_{20}x^2\right)\frac{1}{y} + b_{02}y,$$

la cual es una ecuación de Bernoulli. Esta situación corresponde esencialmente a los casos (b_2) y (c_2) para sistemas del tipo (S2).

(ii) Si $\varepsilon = b_{20} = 0$ obtenemos la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} = (\lambda + b_{11}x) + b_{02}y.$$

(iii) El caso (a_2) nos conduce a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = b_{11}x + \varepsilon x\frac{1}{y},$$

la cual es una ecuación diferencial separable.

(iv) Si $b_{02} = 0$ obtenemos un caso particular de una foliación asociada a la *Ecuación de Liénard*.

$$y\frac{dy}{dx} = (\lambda + b_{11}x)\,y + \left(\varepsilon x + b_{20}x^2\right).$$

3.2 Sistemas Hamiltonianos

En esta sección, acorde a la introducción, se presenta un breve resumen de lo que es un sistema hamiltoniano. Se inicia recordando que en la mecánica clásica, la energía (H) de un sistema está dado por la suma de la energía cinética (T) y la energía potencial (V). La energía se expresa en función de posiciones (q_i) y momentos (p_i), en lugar de posiciones y velocidades. De esta forma, la expresión de la energía queda dada por

$$H = T + V, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{m_i},$$

en donde la energía potencial (o simplemente el potencial) depende de las posiciones y los momentos. Si la energía se conserva, entonces H es una constante de movimiento (integral primera). Si el sistema es disipativo, entonces la energía (H) depende del tiempo. En adelante, las masas serán normalizadas a la unidad y solo se considerarán sistemas conservativos en donde el potencial solo dependa de las posiciones.

El matemático francés J. Liouville en 1840 enunció el teorema que hoy en día lleva su nombre, *teorema de Liouville* y que fue formulado geométricamente por V. Arnold, razón por la cual también se conoce como *el teorema de Liouville-Arnold*.

Definición 3.9. Sea $H : U \subset \mathbb{K}^{2n} \to \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Si $(q,p) \in U$, donde $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ entonces

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

se conocen como *ecuaciones de Hamilton*, y al escribirlas como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales se denomina *sistema hamiltoniano* con n grados de libertad.

En adelante denotaremos por X_H al campo vectorial hamiltoniano asociado a las ecuaciones del movimiento (3.2). Es decir,

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix}.$$

Definición 3.10. Sean $f, g : U \to \mathbb{K}$, el *paréntesis de Poisson* de f y g se define como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Si $\{f, g\} = 0$, se dice que f y g están en *involución*.

El teorema de *Liouville-Arnold*, traduce el problema de la integrabilidad de un sistema hamiltoniano de n grados de libertad a la existencia de n integrales primeras, también conocidas como constantes del movimiento, independientes y en involución.

Definición 3.11. Un hamiltoniano H de n grados de libertad se dice completamente integrable si existen n constantes del movimiento (integrales primeras de X_H), independientes y en involución.

Se observa que la condición de involutividad de las f_i implica que éstas son funcionalmente independientes, es decir sus diferenciales son linealmente independientes sobre un abierto denso.

En particular, para un grado de libertad se tiene que la constante de movimiento o integral primera es la energía H, así que todos los sistemas Hamiltonianos de un grado de libertad son integrables. En dos grados de libertad, el siguiente caso del potencial de Henon-Heiles es integrable.

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2 q_1 - 2q_1^3.$$

Como ejemplos de sistemas hamiltonianos de un grado de libertad se tienen los siguientes:

- Oscilador armónico
$$\frac{p^2}{2} + k\frac{q^2}{2}$$
- Péndulo simple
$$\frac{p^2}{2} + k\cos q$$
- Campo central
$$\frac{p^2}{2} + \frac{k}{q}$$

Un sistema hamiltoniano de n grados de libertad dado por

$$H = \sum_{k=1}^{n} H_k, \quad H_k = \frac{p_k^2}{2} + V_k(q_k),$$

es integrable porque las $2n$ ecuaciones diferenciales son desacopladas puesto que cada hamiltoniano es de un grado de libertad. La solución de cada sistema está dada por

$$t = \int \frac{dq_k}{\sqrt{2H_k + 2V_k(q_k)}}.$$

Si el sistema hamiltoniano es de dos grados de libertad y se quiere buscar una solución particular q_1 haciendo $q_2 = p_2 = h = 0$, se procede igual y se obtiene
$$t = \int \frac{dq_1}{\sqrt{2V(q_1, 0)}}.$$
Una aplicación de los sistemas hamiltonianos es que permiten resolver ecuaciones diferenciales. En el caso de un grado de libertad, la ecuación $y'' = f(y)$ puede resolverse como sigue,
$$t = \int \frac{dy}{\sqrt{2h - 2\int f(y)dy}}.$$
Para dos o más grados de libertad hay que usar técnicas más avanzadas.

Un ejemplo de sistema no integrable, mediante integrales primeras racionales es el sistema de Henón-Heiles con parámetros nulos, tal como se verá en los ejemplos.
$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2 q_1.$$
Durante años se han buscado criterios para determinar la integrabilidad o no integrabilidad de un sistema Hamiltoniano basada en el comportamiento de las soluciones en el dominio complejo.

Definición 3.12. Consideremos H un Hamiltoniano holomorfo definido sobre $U \subset \mathbb{C}^{2n}$ y Υ la superficie de Riemann correspondiente a una curva integral $z = z(t)$ (la variedad riemanniana $z(t)$ puede ser un punto de equilibrio) del campo vectorial X_H. La **ecuación variacional** a lo largo de Υ se escribe como
$$\dot{\eta} = X'_H\,(z(t))\,\eta.$$
Como es natural, las componentes de $z(t)$ son complejas.

Usando la parte lineal de la integral primera $dH(z(t))$ de la ecuación variacional, es posible reducir esta ecuación variacional (es decir, la regla de eliminación de un grado de libertad) para obtener la conocida **ecuación variacional normal**, propia de los sistemas hamiltonianos lineales no autónomos,

$$\dot{\xi} = J_{n-1}S(t)\xi, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

donde $S(t)$ es una matriz simétrica, J_n es la matriz simpléctica, I_n es la matriz idéntica de tamaño $n \times n$. El sistema de ecuaciones diferenciales que corresponde a la ecuación variacional normal es una ecuación variacional de un sistema hamiltoniano lineal. Además, X_H se puede escribir en función del gradiente de H por medio de la matriz simpléctica, es decir,

$$X_H = J_n \nabla H.$$

Históricamente, Poincaré dio un criterio de no integrabilidad basado en *la matriz de monodromía* (prolongaciones analíticas) de la ecuación variacional a lo largo de una curva integral real periódica. En 1888 S. Kowalevski obtuvo un nuevo caso de integrabilidad del sistema de cuerpo rígido con un punto fijo, imponiendo la condición adicional de que la solución general es una función meromorfa de tiempo complejo. Lyapunov generalizó los resultados de Kowalevski y probó que excepto para algunas soluciones particulares, la solución general es univaluada. Su método está basado en el análisis de la ecuación variacional a lo largo de una solución conocida.

Definición 3.13. Se dice que una transformación lineal g es resonante si existen enteros $r_1, \ldots, r_n$ tales que $\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_n} = 1$, donde λ_i son los valores propios de g.

Uno de los resultados influyentes en la Teoría de Morales-Ramis se debe a Ziglin, quien en 1982 obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.9. (Ziglin) *Supóngase que un sistema Hamiltoniano admite $n-k$ integrales primeras meromorfas sobre Υ y que el grupo de monodromía de la ecuación variacional normal contiene una transformación no resonante g. Entonces cualquier otro elemento del grupo de monodromía de la ecuación variacional normal conserva las direcciones propias de g.*

En 1997, durante su estancia postdoctoral en Estrasburgo, Juan Morales Ruiz obtiene conjuntamente con Jean Pierre Ramis el siguiente resultado, el cual es considerado como la herramienta más potente para determinar si un sistema Hamiltoniano es no integrable.

Teorema 3.10. (Morales-Ramis) *Si el campo Hamiltoniano inicial X_H es completamente integrable, entonces la componente identidad, G^0 del grupo de Galois de la ecuación variacional normal es abeliana.*

El teorema de Morales-Ramis es un poderoso criterio de no integrabilidad de un sistema Hamiltoniano: si la componente identidad, G^0 del grupo de Galois de la ecuación variacional normal no es abeliana, entonces el campo Hamiltoniano inicial X_H no es completamente integrable. En general el recíproco del teorema de Morales-Ramis no es cierto, pues la integrabilidad de la ecuación variacional normal no implica la integrabilidad completa del sistema Hamiltoniano.

Si la ecuación variacional normal es del tipo fuchsiana, es decir, todas sus singularidades son regulares (incluyendo el infinito), y la componente conexa de G que contiene la identidad G^0 no es abeliana, entonces el sistema Hamiltoniano es no integrable mediante integrales primeras meromorfas. En caso de que la ecuación variacional normal tenga al menos una singularidad irregular (aun cuando sea el infinito) y G^0 no sea abeliana, entonces el sistema Hamiltoniano es no integrable mediante integrales primeras racionales.

Se observa que la teoría es general, pero en particular se considerarán sistemas Hamiltonianos de 2 grados de libertad que tengan el plano invariante $q_2 = p_2 = 0$ y la solución particular se buscará en dicho plano invariante. De esta forma la solución particular se obtiene como la solución de un sistema Hamiltoniano de un grado de libertad.

Sistemáticamente debe aplicarse el teorema de Morales-Ramis a un sistema Hamiltoniano de dos grados de libertad que tenga un plano invariante en los siguientes pasos:

1. Seleccionar una curva integral particular Υ, haciendo $q_2 = p_2 = 0$ y resolviendo el hamiltoniano de un grado de libertad.
2. Derivar el campo Hamiltoniano X_H y escribir la ecuación varia-

cional.

3. Obtener la ecuación variacional normal.

4. Transformar la ecuación variacional normal en una ecuación diferencial de segundo orden (Teorema 2.21).

5. Chequear los coeficientes de la ecuación diferencial. Si no son funciones racionales hay que ver si cumple las condiciones para aplicar la Algebrización Hamiltoniana y en caso afirmativo obtener la ecuación diferencial con coeficientes funciones racionales.

6. Verificar si todas las singularidades de la ecuación diferencial con coeficientes racionales son regulares, en caso afirmativo aplicar el teorema de Kimura (Teorema 2.22).

7. Si uno de las singularidades de la ecuación diferencial es irregular, se debe reducir la ecuación eliminando el término de la primera derivada y aplicar el algoritmo de Kovacic.

8. Hallar la componente identidad, G^0 del grupo de Galois diferencial de la ecuación diferencial reducida y ver si es abeliana.

Para ilustrar el esquema anterior y como motivación al teorema de Morales-Ramis se presentan los siguientes ejemplos.

El Problema de Sitnikov. El sistema de Sitnikov es una restricción al problema de los tres cuerpos dada por una configuración muy simétrica: los primarios con masas iguales m se mueven en elipses de excentricidad e en el plano XY alrededor de sus centros de masa O, mientras el tercer cuerpo infinitesimal se mueve a lo largo del eje OZ perpendicular al plano donde los primarios se mueven. Tomamos, de manera usual, la normalización de unidades, de tal forma que $m = 1$, el periodo de los primarios es 2π y la constante gravitacional es igual a 1.

El Hamiltoniano correspondiente al movimiento de la partícula infinitesimal a lo largo del eje OZ de este problema es

$$H(z, p_z) = \frac{p_z^2}{2} - \frac{1}{(z^2 + r^2(t))^{\frac{1}{2}}}$$

y la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{(z^2 + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

siendo $r(t)$ la distancia de una de los primarios al centro de masas O. Escogemos como nuevo tiempo la *anomalía excéntrica* τ. La transformación es dada por la ecuación de Kepler

$$t = \tau - e\sin\tau, \quad dt = (1 - e\cos\tau)d\tau$$

entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{dz}{d\tau} = (1 - e\cos\tau)v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{(1 - e\cos\tau)z}{(z^2 + r^2(\tau))^{\frac{3}{2}}}, \quad r(\tau) = \frac{1 - e\cos\tau}{2}.$$

Se estudian ahora dos casos del problema de los tres cuerpos de Sitnikov.

El problema del triangulo isósceles. Considérese el caso en que la órbita de los primarios es circular y la distancia de cada primario al centro de masas O es 1.

El Hamiltoniano correspondiente a este problema, del cual se sabe que es completamente integrable porque es de un grado de libertad, es

$$H(z, p_z) = \frac{p_z^2}{2} - \frac{1}{(z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

y la ecuación de movimiento del tercer cuerpo está dada por

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{(z^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{dz}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{z}{(z^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ahora se aplican los pasos del teorema de Morales-Ramis

1. Como curva integral particular Υ se toma $z = v = 0$.

2. La ecuación variacional normal a lo largo de Υ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}.$$

3. Se observa que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz con coeficientes constantes y por lo tanto la ecuación diferencial lineal reducida tiene coeficientes constantes. Como vimos en el capítulo 2, los únicos casos posibles para el grupo de Galois diferencial de las ecuaciones diferenciales de la forma $y'' = k^2 y$, siendo k una constante, son isomorfos all grupo identidad, al grupo aditivo y al grupo multiplicativo, por lo tanto la componente identidad siempre será abeliana para estos casos.

Órbita de colisión triple. Considérese el caso en que $e = 1$ y la distancia de una de los primarios al centro de masas O es $r(\tau) = \frac{1-\cos\tau}{2}$. El Hamiltoniano y la ecuación de movimiento del tercer cuerpo correspondiente a este problema, del cual nada se sabe, son los mismos del caso anterior. Esta ecuación se transforma en

$$\frac{dz}{d\tau} = (1-\cos\tau)v, \qquad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{(1-\cos\tau)z}{(z^2 + r^2(\tau))^{\frac{3}{2}}}, \qquad r(\tau) = \frac{1-\cos\tau}{2}.$$

Se aplican los pasos del teorema de Morales-Ramis

1. Como curva integral particular Υ tomamos la órbita de la colisión triple con $e = 1$, $r(\tau) = \frac{1-\cos\tau}{2}$, $z = v = 0$.

2. La ecuación variacional normal a lo largo de Υ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-\cos\tau \\ -\frac{8}{(1-\cos\tau)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}.$$

   Por el teorema 2.21 del capítulo anterior, el sistema dado por

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-\cos\tau \\ -\frac{8}{(1-\cos\tau)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}.$$

se transforma en

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \frac{\sin\tau}{1-\cos\tau}\frac{d\xi}{d\tau} + \frac{8}{1-\cos\tau}\xi = 0.$$

Debido a que esta ecuación diferencial tiene coeficientes que no son funciones racionales, aplicamos la Algebrización Hamiltoniana. En particular usamos el cambio de variable Hamiltoniano $x = \frac{\cos\tau}{2}+1$. Así obtenemos

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x-1}\right)\frac{d\xi}{dx} + 4\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}\right)\xi = 0.$$

Se observa que los tres puntos singulares de esta ecuación diferencial son de tipo regular.

3. Usando el teorema 2.9 con $n = 2$, la ecuación anterior se transforma en la ecuación diferencial reducida

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = r\eta, \quad r = \frac{5-72x}{16x^2(x-1)^2} = -\frac{67}{16(x-1)^2} + \frac{31}{8(x-1)} + \frac{5}{16x^2} - \frac{31}{8x}.$$

4. Ahora procedemos a aplicar el Algoritmo de Kovacic. Por el paso 1 se tiene que $\Gamma = \{0,1,\infty\}$, $\circ(r_0) = \circ(r_1) = 2$, $\circ(r_\infty) = 3$. Esto indica que la ecuación diferencial reducida puede caer en cualquiera de los tres primeros casos (c_2, ∞_1). Primero se analiza el caso 1: $s = 5-72x$, $t = 16x^2(x-1)^2$, por lo tanto se tiene que

$$r = \frac{s}{t} = -\frac{67}{16(x-1)^2} + \frac{31}{8(x-1)} + \frac{5}{16x^2} - \frac{31}{8x},$$

$\Gamma = \{0,1,\infty\}$, $\circ(r_0) = \circ(r_1) = 2$, y $\circ(r_\infty) = \deg t - \deg s = 3$. Es claro que esta ecuación diferencial reducida cae dentro del caso 1, (c_2, ∞_1), por (∞_1) se tiene que $\alpha_\infty^+ = 0$ y $\alpha_\infty^- = 1$. Ahora, por (c_2) se tiene que para el polo $x = 1$, $b = \frac{-67}{16}$, mientras que para $x = 0$, $b = \frac{5}{16}$ y esto implica que $[\sqrt{r}]_{1,0} = 0$ y $\alpha_{1,0}^{\pm} \notin \mathbb{R}$, por lo tanto $D = \emptyset$. De la misma se hace para los otros 2 casos y se concluye que $D = \emptyset$ y por lo tanto la ecuación diferencial lineal reducida cae en el caso 4, indicando que no tiene soluciones liouvillianas.

5. Con lo anterior se concluye que su grupo de Galois es conexo y no resoluble ($SL(2,\mathbb{C})$), por lo tanto como G^0 se preserva bajo las transformaciones de sistema a ecuación diferencial y de algebrización, la componente conexa de la identidad del grupo de Galois diferencial de la ecuación variacional no es un grupo abeliano. Es decir, que el campo hamiltoniano inicial X_H correspondiente al problema de los tres cuerpos de Sitnikov con órbita de colisión triple no es completamente integrable con integrales primeras meromorfas

Problema de Kepler con coordenadas giratorias. El Hamiltoniano correspondiente al problema de los tres cuerpos restringido al plano, con parámetro $\mu = 0$ está dado por

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (q_2 p_1 - q_1 p_2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

Se sabe que este hamiltoniano es completamente integrable por ser el problema de dos cuerpos en coordenadas giratorias. La ecuación de movimiento está dada por

$$\dot{q}_1 = q_2 + p_1, \quad \dot{q}_2 = -q_1 + p_2, \quad \dot{p}_1 = -\frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} + p_2, \quad \dot{p}_2 = -\frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - p_1.$$

Se aplican los pasos del teorema de Morales-Ramis

1. Como curva integral particular Υ se toma $q_1 = p_2 = 1, q_2 = p_1 = 0$.

2. La ecuación variacional a lo largo de Υ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

3. Se observa que la matriz de la ecuación variacional tiene dos bloques iguales: el primero y el tercero, además el segundo y el cuarto bloque son I_2 y $-I_2$, de tal forma que la ecuación variacional normal (utilizando el primer bloque) a lo largo de Υ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

4. Se observa que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz con coeficientes constantes y por lo tanto la componente identidad es abeliana.

El sistema de Henón-Heiles. El Hamiltoniano de este sistema está dado por

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2(A + q_1) - \frac{\lambda}{3}q_1^3.$$

Se considerarán dos ejemplos, el primero es un caso integrable y el segundo es no integrable.

Un caso integrable. Consideremos el Hamiltoniano de Henón-Heiles

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2 q_1 - 2q_1^3.$$

El sistema Hamiltoniano está dado por

$$\begin{array}{rcl} \dot{q}_1 & = & p_1, \\ \dot{q}_2 & = & p_2, \\ \dot{p}_1 & = & q_2^2 + 6q_1^3, \\ \dot{p}_2 & = & 2q_2 q_1. \end{array}$$

Se aplican los pasos del teorema de Morales-Ramis

1. Como solución particular se toma

$$\Upsilon : \quad (\dot{q}_1)^2 = 4q_1^3, \quad q_1 = \frac{1}{t^2}, \quad p_1 = -\frac{2}{t^3}, \quad q_2 = p_2 = 0.$$

2. La ecuación variacional normal a lo largo de Υ está dada por

$$\eta' = X_H'(q_1(t))\eta, \quad X_H'(q_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12q_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{12}{t^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   Por el teorema 2.21, este sistema se transforma en

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{12}{t^2}\xi.$$

3. La ecuación diferencial anterior corresponde a una ecuación de Cauchy - Euler, con $m = 3$ y tal como se estudió en el capítulo 2 se tiene que el grupo de Galois de esta ecuación es el grupo identidad, el cual es un grupo conexo y abeliano.

Un caso no integrable. El Hamiltoniano de Henón-Heiles que ahora se considera es

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_1 q_2^2.$$

El sistema de Henón-Heiles es

$$\begin{aligned} \dot{q_1} &= p_1, \\ \dot{q_2} &= p_2, \\ \dot{p_1} &= q_2^2, \\ \dot{p_2} &= 2q_1 q_2. \end{aligned}$$

Se aplican los pasos del teorema de Morales-Ramis

1. Como solución particular se toma
$$\Upsilon : q_1 = \frac{t}{2}, \quad p_1 = 1, \quad q_2 = p_2 = 0.$$

2. La ecuación variacional normal a lo largo de Υ está dada por
$$\eta' = X_H'(q_1(t))\eta, \quad X_H'(q_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2q_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$
Por el teorema 2.21 este sistema se transforma en
$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = t\xi.$$
Como esta ecuación está en la forma reducida, se procede a aplicar el algoritmo de Kovacic. Se tiene entonces que el grupo de Galois de esta ecuación diferencial es $SL(2, \mathbb{C})$ que es un grupo conexo pero no es resoluble y por lo tanto no es abeliano. Además, la ecuación de Airy presenta una singularidad irregular en el infinito y por lo tanto este sistema de Henon-Heiles no es completamente integrable mediante integrales primeras racionales.

Utilizando el resto de los ejemplos de la sección 2, se pueden construir sistemas hamiltonianos tales que el grupo de Galois de su ecuación variacional normal no sea abeliana. Se puede considerar el Hamiltoniano

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - V(q_1, q_2),$$

luego se buscan las ecuaciones de Hamilton y se deriva el campo Hamiltoniano para construir la ecuación variacional, de tal forma que ésta quede

$$\eta' = X'_H(q_1(t))\eta, \quad X'_H(q_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f(q_1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema se transforma en

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = r(t)\xi.$$

Ahora bien, si $r(t)$ hace parte del listado de las no integrables mencionadas en el capítulo 2 o si es la correspondiente a otros ejemplos de ecuaciones no integrables del capítulo 2, entonces el sistema hamiltoniano inicial no es integrable mediante integrales primeras (meromorfas o racionales).

En general, construir ejemplos de aplicación del algoritmo de Kovacic a la teoría de Morales-Ramis no es una tarea fácil. Hay muy pocos ejemplos del algoritmo de Kovacic, sobre todo del caso 3. No menos laborioso es construir un sistema hamiltoniano a partir de una solución particular. Sin embargo, hay más ejemplos de aplicación del teorema de Kimura en la teoría de Morales-Ramis, sobre todo aquellos que se relacionan con los *puntos de Darboux*, también conocidos como los puntos de la *órbita homotética*.

En [8] se planteó un método para construir campos Hamiltonianos no integrables a partir de la ecuación variacional, el cual se expone a continuación.

Consideremos un Hamitoniano clásico en dos grados de libertad,

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + V(x_1, x_2).$$

Si se verifica que el plano Π de ecuaciones $\{x_2 = y_2 = 0\}$, es invariante por el flujo, entonces que debe ser

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|_{\Pi} = 0.$$

Considerando el desarrollo en serie de potencias con respecto a x_2, tenemos:

$$V = \phi(x_1) + \alpha(x_1)\frac{x_2^2}{2} + \beta(x_1, x_2)x_2^3. \tag{3.20}$$

Para ciertos ϕ, α y β, con

$$\lim_{x_2 \to 0} \beta(x_1, x_2) < \infty.$$

La ecuación variacional normal para cada curva solución contenida en Π y parametrizada por t, es de la forma:

$$\ddot{\xi} = a(t)\xi, \quad \text{con } a(t) = \alpha(x_1(t)). \tag{3.21}$$

Consideremos entonces

$$Q\left(a, \frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}, \dots\right)$$

un polinomio diferencial en a con coeficientes constantes. Queremos entonces calcular los potenciales (3.20) tales que para toda curva solución contenida en Π, la ecuación variacional normal (3.21) verifica $Q = 0$.

Exposición del método general. El flujo en el plano invariante Π, viene dado por el Hamiltoniano restringido

$$h = \frac{y_1^2}{2} + \phi(x_1),$$

que produce el campo Hamiltoniano,

$$X_h = y_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{d\phi}{dx_1}\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

dado que a lo largo de cada curva solución, $a(t) = \alpha(x_1(t))$, se tiene que

$$\frac{d^k a}{dt^k}(t) = (X_h^k \alpha)(x_1(t)).$$

La ecuación
$$Q(a, \frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}, \ldots) = 0,$$
puede entonces sustituirse por,
$$Q(\alpha, X_h\alpha, X_h^2\alpha, \ldots) = 0.$$
Puede observarse que la expresión
$$Q(\alpha, X_h\alpha, X_h^2\alpha, \ldots)$$
es un polinomio en y_1, cuyos coeficientes son polinomios diferenciales en α, $\frac{d\phi}{dt}$ con coeficientes constantes; ya que todos los coeficientes han de anularse, hemos reducido el problema a un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias en α y ϕ.

En primer lugar hemos de calcular las expresiones para las derivadas sucesivas.
$$\frac{da}{dt} = y_1\frac{d\alpha}{dx_1} \tag{3.22}$$
$$\frac{d^2a}{dt^2} = y_1^2\frac{d^2\alpha}{dx_1^2} - \frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1} \tag{3.23}$$
$$\frac{d^3a}{dt^3} = y_1^3\frac{d^3\alpha}{dx_1^3} - y_1\left(\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1}\right) + 2\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d^2\alpha}{dx_1^2}\right) \tag{3.24}$$
$$\begin{aligned}\frac{d^4a}{dt^4} = y_1^4\frac{d^4\alpha}{dx_1^4} - y_1^2\left(\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1}\right) + 2\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d^2\alpha}{dx_1^2}\right) + 3\frac{d^3\alpha}{dx_1^3}\frac{d\phi}{dx_1}\right) + \\ + \left(\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1}\right) + 2\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d^2\alpha}{dx_1^2}\right)\frac{d\phi}{dx_1}\end{aligned} \tag{3.25}$$
En general:
$$\frac{d^na}{dx_1^n} = \sum_{n\geq k\geq 0} E_{n,k}y_1^k,$$
donde los coeficientes $E_{n,k}$, son polinomios diferenciales en α, ϕ, que se calculan mediante la ley de recurrencia:
$$E_{n+1,k} = \frac{dE_{n,k-1}}{dx_1} - (k+1)E_{n,k+1}\frac{d\phi}{dx_1} \tag{3.26}$$

con condiciones iniciales:

$$E_{1,1} = \frac{d\alpha}{dx_1}, \quad E_{1,k} = 0 \ \forall k \neq 1.$$

Observación. Los polinomios diferenciales $E_{n,k}$, definidos por (3.26) verifican:

- $E_{n,n} = \frac{d^n\alpha}{dx_1^n}$.
- Si $n-k$ es impar, $k<0$, ó $k>n$ entonces $E_{n,k}=0$.

Para ilustrar este método, a manera de ejemplos calcularemos los potenciales de campos Hamiltonianios cuyas ecuaciones variacionales normales dan lugar a *ecuaciones de Airy*, a potenciales cuadráticos, potenciales polinomiales de grado estrictamente impar y a la *ecuación de Mathieu.*

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial con coeficientes constantes

$$\ddot{\xi} = c_0\xi.$$

La ecuación es $Q = \frac{da}{dt} = 0$. Observando (3.22) se tiene que $\frac{d\alpha}{dx_1} = 0$, por tanto α es una constante, y ϕ es libre. Los Hamiltonianos considerados que dan lugar a ecuaciones variacionales normales transformables a nuestra ecuación diferencial con coeficientes constantes son entonces de la forma:

$$H = \frac{y_1^2+y_2^2}{2} + \phi(x_1) + \lambda x_2^2 + \beta(x_1,x_2)x_2^3$$

Ejemplo. Consideremos las ecuaciones tipo Airy

$$\ddot{\xi} = (c_0 + c_1 t)\xi.$$

La ecuación es $Q = \frac{d^2a}{dt^2} = 0$. De (3.23) se tienen las ecuaciones:

$$\frac{d^2\alpha}{dx_1^2} = 0, \quad \frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1} = 0.$$

Que se desacoplan en dos sistemas independientes,

$$\frac{d\alpha}{dx_1} = 0, \quad \begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dx_1^2} = 0 \\ \frac{d\phi}{dx_1} = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del primer sistema caen en el caso anterior y dan lugar a ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes en la ecuación variacional normal. Las soluciones del segundo sistema son:

$$\phi \text{ constante }, \quad \alpha = 2\lambda + 2\mu x_1.$$

Tenemos que los Hamiltonianos considerados que dan lugar a ecuaciones de Airy en la ecuación variacional normal son:

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \lambda x_2^2 + \mu x_1 x_2^2 + \beta(x_1, x_2) x_2^3.$$

La relación entre los coeficientes c_0, c_1 y el Hamiltoniano, se obtiene integrando el flujo Hamiltoniano en el plano invariante Π.

$$x_1 = \sqrt{2h}(t - t_0), \quad a(t,h) = \alpha(x_1(t))$$

Ejemplo. Calculemos ahora los Hamiltonianos cuyas ecuaciones variacionales normales son transformables a ecuaciones de la forma de la forma:

$$\ddot{\xi} = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)\xi.$$

La ecuación diferencial satisfecha por a es

$$Q = \frac{d^3 a}{dt^3} = 0.$$

De (3.24) se tienen las ecuaciones:

$$\frac{d^3\alpha}{dx_1^3} = 0, \quad \frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1}\right) + 2\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d^2\alpha}{dx_1^2} = 0.$$

La solución general de la primera ecuación es,

$$\alpha = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2}x_1 + \frac{\gamma}{2}x_1^2,$$

sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene:

$$\frac{d^2\phi}{dx_1^2} + 3\frac{2\gamma}{\mu + 2\gamma x_1}\frac{d\phi}{dx_1} = 0,$$

ecuación que se integra mediante dos cuadraturas, obteniéndose:

$$\phi = \frac{\delta}{(\mu + 2\gamma x_1)^2} + cte.$$

Los Hamiltonianos que dan las ecuaciones variacionales normales requeridas, son entonces:

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{\delta}{(\mu + 2\gamma x_1)^2} + \lambda x_2^2 + \mu x_1 x_2^2 + \gamma x_1^2 x_2^2 + \beta(x_1, x_2) x_2^3.$$

Es importante observar que, cuando $\delta \neq 0$, el flujo a lo largo del plano invariante Π no es lineal. Mediante funciones hipérbólicas, se obtiene:

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{z^2 - 2\delta}}{4\gamma h}, \quad \text{con} \quad z = \sqrt{2h}(\mu + 2\gamma x_1).$$

de otro modo,

$$8\gamma^2 h^2 (t - t_0)^2 = h(\mu + 2\gamma x_1)^2 - \delta.$$

Teorema 3.11. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\ddot{\xi} = P_{2n+1}(t)\xi, \quad P_k \in \mathbb{C}[t], \quad \text{grad}(P_k) = k \in \{1, 3, \ldots 2n+1\}.$$

Sea R_n el sistema de ecuaciones diferenciales en ϕ, α,

$$\{E_{n,0} = 0, E_{n,1} = 0, \ldots, E_{n,n} = 0\}.$$

Si (ϕ, α) es una solución de R_{2m} y $\frac{d\phi}{dx_1} \neq 0$, entonces (ϕ, α) es solución de R_{2m-1}.

Demostración. De la primera ecuación,

$$E_{2m,0} = \frac{dE_{2m-1,-1}}{dx_1} - \frac{d\phi}{dx_1} E_{2m-1,1} = 0,$$

aplicando que $E_{2m-1,-1} = 0$, se obtiene

$$E_{2m-1,1} = 0.$$

Se la segunda,

$$E_{2m,2} = \frac{dE_{2m-1,1}}{dx_1} - 3\frac{d\phi}{dx_1} E_{2m-1,3} = 0,$$

aplicando lo anterior se obtiene

$$E_{2m-1,3} = 0,$$

y así sucesivamente. □

Teorema 3.12. Sea H un hamiltoniano clásico

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + V(x_1, x_2),$$

que deja Π invariante, y tal que su ecuación variacional normal a lo largo de cualquier curva solución contenida en Π es una ecuación diferencial,

$$\ddot{\xi} = R(H, t)\xi,$$

con R polinomio en t de grado $2n + 1$. Entonces, módulo una constante ϕ,

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + P_{2n+1}(x_1)x_2^2 + \beta(x_1, x_2)x_2^3$$

para cierto $P_{2n+1}(x_1) \in \mathbb{C}[x_1]$, polinomio de grado $2n + 1$.

Uno de los resultados principales utilizando este método es el siguiente teorema.

Teorema 3.13. *las familias de Hamiltonianos,*

$$\frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{\lambda_4}{(\lambda_2 + 2\lambda_3 x_1)^2} + \lambda_0 - \lambda_1 x_2^2 - \lambda_2 x_1 x_2^2 - \lambda_3 x_1^2 x_2^2 + \beta(x_1, x_2)x_2^3,$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_3 \neq 0$, y $\beta(x_1, x_2)$ es una función analítica definida sobre una vecindad de $\{x_2 = 0\}$; tiene ecuacióin variacional normal de la forma $\ddot{\xi} = P(t)\xi$, siendo P un polinomio no constante a lo largo de curva integral genérica en $\Gamma = \{x_2 = y_2 = 0\}$, y por lo tanto los campos Hamiltonianos no son integrables mediante integrales primeras racionales.

Recordemos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función homogenea con grado de homogeneidad k si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$. El siguiente resultado puede encontrarse en [6].

No-Integrabilidad de Potenciales Homogeneos de grado -1. Consideremos el sistema Hamiltoniano de dos grados de libertad con potencial homogeneo de grado -1 y cuyo Hamiltoniano es dado por

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - U(x, y),$$

Supongamos que $U(x, y)$ está definida y es positiva para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, excepto en el origen.

Haciendo el cambio a coordenadas polares el Hamiltoniano anterior se transforma en

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{1}{r}U(\theta).$$

Usando el *método de explosión de McGehee*, dado que se satisfacen las condiciones para utilizarlo, se toman las coordenadas $v = r^{-1/2}p_r$, $u = r^{-1/2}p_\theta$ y reescalando el tiempo tenemos $dt = r^{3/2}d\tau$.

Las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - U(\theta), \\ \theta' &= u, \\ u' &= -\frac{1}{2}vu + U'(\theta). \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde la prima en el lado izquierdo denota la derivada con respecto a τ y $U'(\theta)$ denota la derivada con respecto a su argumento, el cual no puede causar confusión. El sistema de McGehee (3.27) deja invariante la superficie de energía

$$E_h = \{(r, \theta, u, v) \mid r > 0, \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = U(\theta) + rh\}, \tag{3.28}$$

la cual puede ser extendida de forma invariante hasta su frontera y la variedad de colisión será entonces

$$\Lambda = \{(r, \theta, u, v) \mid r = 0, \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = U(\theta)\}. \tag{3.29}$$

Debido a que $U(\theta)$ es periódica, por el teorema del valor medio, existe θ_c tal que $U'(\theta_c)=0$. Sea $v_c = 2U(\theta_c)$. Entonces para $h<0$ existe una órbita *homotética de expulsión-colisión* dada explícitamente por $\theta=\theta_c$, $u=0$ y

$$\begin{aligned} r_h(\tau) &= -\frac{v_c^2}{2h}\operatorname{sech}^2(v_c\tau/2), \\ v_h(\tau) &= -v_c\tanh(v_c\tau/2). \end{aligned}$$

Las ecuaciones variacionales a lo largo de la órbita homotética son

$$\begin{aligned} \delta r' &= v_h\delta r + r_h\delta v, \\ \delta v' &= v_h\delta v, \\ \delta\theta' &= \delta u, \\ \delta u' &= -\frac{1}{2}v_h\delta u + U''(\theta_c)\delta\theta \end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones se desacoplan y constituyen las ecuaciones variacionales normales. Ellas pueden ser expresadas con respecto al tiempo re-escalado $s = v_c\tau/2$, lo cual seguirá siendo denotado mediante primas,

$$\delta\theta''(s) - \tanh(s)\delta\theta'(s) - \omega^2\theta(s) = 0 \tag{3.30}$$

donde

$$\omega^2 = \frac{2U''(\theta_c)}{U(\theta_c)}.$$

(ω puede ser imaginario).

Observemos que las ecuaciones de McGehee (3.27) son hamiltonianas con respecto a la forma simpléctica $\alpha = 2dv\wedge dr^{1/2} + d(r^{1/2}u)\wedge d\theta$ obtenido por el retorno o regreso de la forma canónica $dp_x\wedge dx + dp_y\wedge dy$ bajo la transformación de McGehee. Por lo tanto se puede aplicar la Teoría de Morales–Ramis a este caso.

Teorema 3.14. *Consideremos el Hamiltoniano de un sistema dado por*

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2) - U(x,y)$$

con $U(x,y) > 0$ homogeneo de grado de homegeneidad -1, definido para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Sea $U'(\theta_c) = 0$ y sea

$$\omega^2 = \frac{2U''(\theta_c)}{U(\theta_c)},$$

entonces si

$$\omega^2 \neq n(n+1) \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.31}$$

entonces sobre un nivel negativo de energía el sistema no tiene una integral primera meromorfa adicional en una vecindad de la solución homotética definida por $\theta = \theta_c$.

Demostración. Consideremos la ecuación variacional (3.30)

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \tanh(t)\frac{dz}{dt} - \omega^2 z = 0,$$

la cual mediante el cambio de variable dependiente $z(t) = y(t)\sqrt{\cosh(t)}$ es transformada en la ecuación diferencial reducida

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \phi(t)y(t),\ \phi(t) = \frac{\cosh^2(t) + 4\omega^2\cosh^2(t) - 3}{4\cosh^2(t)}. \tag{3.32}$$

Ahora aplicamos la Algebrización Hamiltoniana debido a que la ecuación (3.32) cumple con las condiciones y está lista para ser algebrizada. El cambio de variable Hamiltoniano que consideramos es $\tau = \tau(t) = \cosh(t)$, donde $\dot{\tau} = \sinh(t)$, $(\dot{\tau})^2 = \sinh^2(t) = -1 + \cosh^2(t)$ so that

$$\alpha = -1 + \tau^2 \quad \text{and} \quad f = \frac{\tau - 1 + 4\kappa_j}{4(1-\tau)}.$$

La ecuación algebrizada es

$$\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} - \frac{\tau}{1-\tau^2}\frac{dy(\tau)}{d\tau} - \frac{(1+4\omega^2)\tau^2 - 3}{4\tau^2(\tau^2-1)}y(\tau) = 0, \tag{3.33}$$

y los puntos 0, 1, -1 e ∞ son singularidades regulares. Esto significa que tenemos dos opciones, aplicamos el teorema de Kimura o aplicamos el algoritmo de Kovacic. Transformamos la ecuación (3.33) en su forma reducida, es decir,

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = r(\tau)\eta,\ r(\tau) = \frac{4\omega^2\tau^4 - (6+4\omega^2)\tau^2 + 3}{4\tau^2(\tau-1)^2(\tau+1)^2},\ y(\tau) = \frac{\eta}{\sqrt[4]{1-\tau^2}} \tag{3.34}$$

siendo $\omega \neq 0$, porque con $\omega = 0$ la ecuación diferencial se puede resolver fácilmente debido a que la ecuación variacional sería una ecuación de segundo orden transformable a una ecuación de primer orden. Podemos ver que $\Upsilon = \{0, -1, 1, \infty\}$ y que la ecuación (3.34) pueden caer en cualquiera de los cuatro casos del algoritmo de Kovacic. Ahora bien, expandiendo $r(\tau)$ en fracciones parciales tenemos que

$$r(\tau) = -\frac{3}{16(\tau-1)^2} + \frac{8\omega^2 - 3}{16(\tau-1)} - \frac{3}{16(\tau+1)^2} + \frac{3 - 8\omega^2}{16(\tau+1)} + \frac{3}{4\tau^2}.$$

Comenzaremos analizando el primer caso. La ecuación (3.34) satisface las condiciones $\{c_2, \infty_2\}$ porque $\circ r_1 = \circ r_{-1} = 1 = \circ r_0 = \circ r_\infty = 2$. Debido a la condición ∞_2, necesitamos la serie de Laurent de $r(\tau)$ alrededor de ∞, lo cual corresponde a

$$r(\tau) = \omega^2\tau^2 + \left(-\frac{3}{2} + \omega^2\right)\tau^4 + \left(\omega^2 - \frac{9}{4}\right)\tau^6 + O(\tau^8)$$

obteniendo las expresiones

$$[\sqrt{r}]_0 = [\sqrt{r}]_{-1} = [\sqrt{r}]_1 = [\sqrt{r}]_\infty = 0,$$

$$\alpha_1^+ = \alpha_{-1}^+ = \tfrac{3}{4}, \quad \alpha_1^- = \alpha_{-1}^- = \tfrac{1}{4}, \quad \alpha_\infty^\pm = \tfrac{1 \pm \sqrt{1+4\omega^2}}{2}.$$

Por el paso 2, $D = \mathbb{Z}_+$ y ω^2 tiene las siguientes posibilidades:

$$\omega^2 = (n+2)(n+3), \quad \omega^2 = \tfrac{(2n+3)(2n+5)}{4}, \quad \omega^2 = (n+1)(n+2),$$

$$\omega^2 = n(n+1), \quad \omega^2 = \tfrac{(2n+1)(2n-1)}{4}, \quad \omega^2 = n(n-1),$$

descartando $\omega^2 \notin \mathbb{Z}$ porque la ecuación diferencial no tiene soluciones Liouvillianas (el polinomio mónico P_n no existe), tomamos el resto de los valores para ω^2, los cuales son equivalentes a $\omega^2 = n(n+1)$. Para cada n podemos construir ω y por el paso 3 existe un polinomio mónico de grado n en el cual cada solución de la ecuación diferencial (3.34) es dada para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Continuando con el caso 2, esperariamos encontrar valores distintos de ω^2 que los obtenidos por el caso 1. Por lo tanto, la ecuación (3.34) satisface las condiciones $\{c_2, \infty_2\}$, porque $\circ r_0 = \circ r_1 = \circ r_{-1} = \circ r_\infty = 2$, obteniendo las expresiones

$$E_0 = \{-2, 2, 6\},\ E_1 = E_{-1} = \{1, 2, 3\}$$

y

$$E_\infty = \left\{2, 2 - \sqrt{1 + 4\omega^2}, 2 + \sqrt{1 + 4\omega^2}\right\}.$$

Por el paso 2, $D = \mathbb{Z}_+$ y obtenemos nuevamente que $\omega^2 = n(n+1)$, por lo tanto descartamos el caso 2.

Finalmente, continuando con el caso 3, esperaríamos obtener valores distintos de ω^2 que los presentados en los casos anteriores, pero nuevamente aparece la expresión $\sqrt{1 + 4\omega^2}$, la cual reemplazada en E_c y E_∞ nos da nuevamente $\omega^2 = n(n+1)$. Esto significa que la ecuación diferencial (3.34) tiene como grupo de Galois diferencial a un subgrupo del grupo de Borel cuando $\omega^2 = n(n+1)$. En caso contrario, cuando $\omega^2 \neq n(n+1)$, el grupo de Galois diferencial es $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, el cual es conexo y no resoluble. En conclusión, el grupo de Galois de la ecuación diferencial (3.34) es virtualmente abeliano (su componente conexa que contiene a la identidad es abeliana) para $\omega^2 = n(n+1)$ y no resoluble para $\omega^2 \neq n(n+1)$. $\square$

3.3 Ecuación de Schrödinger

En sección estudiaremos algunos aspectos de la mecánica cuántica no relativista desde el punto de vista de la teoría de Galois diferencial. El objeto principal de nuestro estudio Galoisiano es entonces la ecuación estacionaria y unidimensional de Schrödinger, asumiendo todas sus constantes iguales a la unidad, la cual escribimos como

$$\mathcal{L}_\lambda := H\Psi = \lambda\Psi, \quad H = -\partial_x^2 + V(x), \quad V \in K, \tag{3.35}$$

donde K es un cuerpo diferencial (con $\mathbb{C}$ como cuerpo de constantes. Estamos interesados en la integrabilidad de la ecuación (3.35) en consonancia con la definición 2.2.

Introducimos las siguientes notaciones para conectar estos dos mundos: el cuántico y el Galoisiano.

- Denotemos por $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ al conjunto de autovalores λ tales que la ecuación (3.35) es integrable de acuerdo con la definición 2.2.

- Denotemos por Λ_+ al conjunto $\{\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$ y por Λ_- al conjunto $\{\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{R} : \lambda \leq 0\}$.

- Denotemos por L_λ la extensión de Picard-Vessiot de $\mathcal{L}_\lambda$. Por lo tanto, el grupo de Galois diferencial de $\mathcal{L}_\lambda$ es denotado por $G(L_\lambda/K)$.

El conjunto Λ se denomina *espectro algebraico* (o de forma alternativa *el conjunto espectral Liouvilliano*) de H. Es importante notar que Λ puede ser $\emptyset$, i.e.,

$$G(L_\lambda/K) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por otra parte, por el teorema de Lie-Kolchin tenemos lo siguiente. Si $\lambda_0 \in \Lambda$ entonces

$$(G(L_{\lambda_0}/K))^0 \subseteq \mathbb{B}.$$

Definición 3.14. Decimos que el potencial $V(x) \in K$ es:

- un *potencial algebraicamente resoluble* cuando Λ es un conjunto infinito,

- un *potencial algebraicamente casi-resoluble* cuando Λ es un conjunto finito no vacío, o

- un *potencial algebraicamente no resoluble* cuando $\Lambda = \emptyset$.

Cuando $\mathrm{Card}(\Lambda) = 1$, decimos que $V(x) \in K$ es un *potencial algebraicamente casi-resoluble trivial.*

Ejemplos. Consideremos $K = \mathbb{C}(x)$.

1. Si $V(x) = x$, entonces $\Lambda = \emptyset$, $V(x)$ es algebraicamente no resoluble, ver [1, 2, 8, 12, 21] para mayores detalles.

2. Si $V(x) = 0$, entonces $\Lambda = \mathbb{C}$, es decir, $V(x)$ es algebraicamente resoluble. Además,

$$G(L_0/K) = e, \quad G(L_\lambda/K) = \mathbb{G}_m, \quad \lambda \neq 0.$$

3. Si $V(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}$, entonces $\Lambda = \{n : n \in \mathbb{Z}\}$, $V(x)$ es algebraicamente resoluble. Este ejemplo corresponde a la ecuación de Weber, la cual fue mencionada en el capítulo 2.
4. Si $V(x) = x^4 - 2x$, entonces $\Lambda = \{0\}$, $V(x)$ es trivialmente algebraicamente casi-resoluble.

Notemos que podemos obtener potenciales algebraicamente resolubles y algebraicamente casi-resolubles de las siguientes formas.

- Dado el potencial V, tratamos de resolver la ecuación diferencial
$$\partial_x^2 \Psi_0 = V \Psi_0$$
para obtener el *superpotencial*
$$W = \partial_x \ln(\Psi_0).$$
Si el superpotencial existe en la clase de las funciones Liouvillianas (la ecuación diferencial es integrable), entonces buscamos el espectro algebraico Λ en la ecuación de Schrödinger
$$H\Psi = \lambda\Psi.$$
Utilizando este método, lo mas probable es que el espectro algebraico sea vacío.

- Dando el superpotencial W, construimos el potencial
$$V = \partial_x W + W^2.$$
Acto seguido buscamos el espectro algebraico Λ en
$$H\Psi = \lambda\Psi.$$
Con este método al menos garantizamos que el potencial V es trivialmente algebraicamente casi-resoluble puesto que $0 \in \Lambda$.

- Utilizando ecuaciones diferenciales paramétricas que sean integrables para un conjunto de valores del parámetro, las cuales pueden ser transformadas en ecuaciones de Schrödinger. En este caso, el los valores del parámetro de la ecuación diferencial que hacen que ésta sea integrable, debe coincidir con los autovalores del operador H. Con este método conocemos previamente el espectro algebraico Λ, por lo tanto podemos obtener potenciales algebraicamente resolubles o algebraicamente casi-resolubles, lo cual dependerá solo de la cardinalidad de Λ.

Para estudiar mecánica cuántica, es necesario conocer algunos elementos de análisis funcional. Es por esto que estamos interesados en obtener explícitamente el espectro del operador de Schrödinger (espectro discreto o puntual, espectro continuo, etc.). En particular nos interesa el espectro del operador de Schrödinger con potenciales que no sean algebraicamente no resolubles, es decir, que sean algebraicamente resolubles o algebraicamente casi-resolubles. Nuestro objetivo ahora es claro y corresponde a encontrar autovalores del operador de Schrödinger que a su vez sean elementos del espectro algebraico, es decir

$$\operatorname{spec}(H) \cap \Lambda \neq \emptyset.$$

Por ejemplo, el potencial $V(x) = |x|$ tiene espectro puntual aún cuando $V(x)$ es algebraicamente resoluble. De esta manera, cuando $\operatorname{spec}(H) \cap \Lambda$ es un conjunto infinito, en la terminología usual de la física matemática, esos potenciales son denominados *potenciales resolubles o exactamente resolubles*, los cuales fueron introducidos por Natanzon. De una manera análoga, cuando

$$\operatorname{spec}(H) \cap \Lambda$$

es un conjunto finito, la definición usual en física matemática de esos potenciales es *potenciales casi-resolubles o casi-exactamente resolubles*, los cuales fueron introducidos por Turbiner.

Actualmente el estudio de potenciales exactamente resolubles y casi-exactamente resolubles ha despertado el interés de muchos investigadores en física matemática. Un ejemplo de esta clase de investigaciones corresponde al estudio de la integrabilidad de la ecuación de Schrödinger, estacionaria y unidimensional, con potencial polionomial, es decir, cuando en la ecuación (3.35) $V \in \mathbb{C}[x]$.

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad podemos considerar polinomios mónicos puesto que la ecuaciones diferenciales de la forma

$$\partial_x^2 \xi = (c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0)\, \xi, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

utilizando la técnica de la Algebrización Hamiltoniana, pueden ser transformadas en las ecuaciones diferenciales

$$\partial_\tau^2 \widehat{\xi} = (\tau^n + \ldots + q_1\tau + q_0)\,\widehat{\xi}, \quad x = \sqrt[n+2]{c_n}\tau.$$

Cuando el potencial V es un polinomio de grado impar, es bien conocido que el grupo de Galois diferencial de la ecuación de Schrödinger (3.35) es isomorfo a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, para detalles adicionales consultar [1, 2, 8, 12, 21].

De la misma manera en que se completaba cuadrados en trinomios que no fuesen cuadrados perfectos, se hace una generalización de este hecho en polinomios de grado par, lo cual corresponde al siguiente lema.

Lema 3. 1. (Completación de Cuadrados) *Todo polinomio mónico de grado par puede ser escrito en una sola forma utilizando completación de cuadrados, es decir*

$$Q_{2n}(x) = x^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} q_k x^k = \left(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right)^2 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k, \qquad (3.36)$$

donde

$$a_{n-1} = \frac{q_{2n-1}}{2}, \quad a_{n-2} = \frac{q_{2n-2} - a_{n-1}^2}{2}, \quad a_{n-3} = \frac{q_{2n-3} - 2a_{n-1}a_{n-2}}{2}, \cdots,$$

$$a_0 = \frac{q_n - 2a_1a_{n-1} - 2a_2a_{n-2} - \cdots}{2}, \quad b_0 = q_0 - a_0^2, \quad b_1 = q_1 - 2a_0a_1, \quad \cdots,$$

$$b_{n-1} = q_{n-1} - 2a_0a_{n-1} - 2a_1a_{n-2} - \cdots .$$

Demostración. Basta tomar la igualdad de los dos polinomios y obtener los coeficientes que satisfacen esas igualdad. □

Tal como se observa, si el potencial $V(x)$ tiene la forma de la ecuación (3.36), entonces puede ser escrito en términos del superpotencial $W(x)$, es decir,

$$V(x) = W^2(x) - \partial_x W(x),$$

lo cual indica que

$$W(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

y por lo tanto

$$nx^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1} ka_k x^{k-1}=-\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$$

Con ayuda de este lema se puede demostrar el siguiente teorema, el cual es uno de los resultados principales de esta sección.

Teorema 3.15. (Potenciales Polinomiales y Grupos de Galois) *Consideremos la ecuación de Schrödinger* (3.35)*, siendo* $V(x)\in\mathbb{C}[x]$ *un polinomio de grado* $k>0$, $K=\mathbb{C}(x)$ *y* L_λ *su extensión de Picard-Vessiot. Entonces, el grupo de Galois diferencial* $G(L_\lambda/K)$ *cae en solamente uno de los siguientes casos:*

1. $G(L_\lambda/K)=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$,
2. $G(L_\lambda/K)=\mathbb{B}$,

y el autoanillo diferencial de $H-\lambda$ *es trivial, es decir,*

$$\mathcal{E}(H-\lambda)=\mathrm{Vect}(1).$$

Además $G(L_\lambda/K)=\mathbb{B}$ *si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $V(x)-\lambda$ *es un polinomio de grado* $k=2n$ *escrito en la forma de la ecuación* (3.36).
2. $b_{n-1}-n$ *ó* $-b_{n-1}-n$ *es un entero positivo par* $2m$, $m\in\mathbb{Z}_+$.
3. *Existe un polinomio mónico* P_m *de grado* m*, que satisface la relación algebraica*

$$\begin{aligned}\partial_x^2 P_m+2\left(x^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k\right)\partial_x P_m &\quad+\\ +\left(nx^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{n-1}b_kx^k\right)P_m &= 0,\end{aligned}$$

ó la relación algebraica

$$\begin{aligned}\partial_x^2 P_m-2\left(x^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k\right)\partial_x P_m &\quad+\\ +\left(-nx^{n-1}-\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{n-1}b_kx^k\right)P_m &= 0.\end{aligned}$$

En tales casos, las únicas posibilidades para las funciones propias o autofunciones con superpotencial racional (más aún polinomial) están dadas por

$$\Psi_\lambda = P_m e^{f(x)}, \quad \text{ó} \quad \Psi_\lambda = P_m e^{-f(x)},$$

donde

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

El siguiente resultado caracteriza a los potenciales polinomiales algebracamente resolubles y algebraicamene casi-resolubles.

Teorema 3.16. *Supongamos que $V(x)$ es un potencial polinomial algebraicamente resoluble. Entonces $V(x)$ es un polinomio de grado 2.*

Demostración. Escribiendo $V(x) - \lambda$ en la forma de la ecuación (3.36) podemos ver que $b_{n-1} - n = 2m$ ó $-b_{n-1} - n = 2m$, donde $m \in \mathbb{Z}_+$. Es por lo tanto que la integrabilidad de la ecuación de Schrödinger con $\mathrm{Card}(\Lambda) > 1$ es obtenida cuando b_{n-1} es constante, por lo tanto $n = 1$.

Debemos recordar que no solamente hay obtener los resultados algebraicos, también se deben cumplir las condiciones analíticas. De esta manera, dado el potencial polinomial $V(x)$ que satisface

$$\mathrm{spec}_p(H) \cap \Lambda \neq \emptyset,$$

podemos obtener estados ligados y funciones de onda normalizadas siempre que el potencial polinomial $V(x)$ sea de grado $4n + 2$. Además, una condición de integrabilidad de $H\Psi = \lambda\Psi$ para $\lambda \in \Lambda$ es que b_{2n} sea un entero impar. En particular, si el potencial

$$V(x) = x^{4n+2n} + \mu x^{2n}, \quad n > 0$$

es algebraicamente casi-resoluble, entonces μ es un entero impar. Para esta clase de potenciales, obtenemos estado base solamente cuando μ es un entero negativo impar.

Por otra parte, el polinomio no constante $V(x)$ de grado $4n$ es asociado a *operadores Hamiltonianos no hermitianos* y a lo se conoce como *invariancia $\mathcal{PT}$*, la cual no se considera en este material. Por otra parte, una condición de integrabilidad de $H\Psi=\lambda\Psi$ para $\lambda\in\Lambda$ es que b_{2n-1} debe ser un entero par. En particular, si la ecuación de Schrödinger

$$H\Psi=\lambda\Psi,\quad V(x)=x^{4n}+\mu x^{2n-1},\quad \lambda\in\Lambda$$

es integrable, entonces μ es un entero par.

Para ilustrar los teoremas anteriores, así como la observación anterior, se presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo. La ecuación de Weber y el oscilador armónico. La ecuación de Schrödinger con potencial $V(x)=x^2+q_1x+q_0$ corresponde a la forma de Rehm de la ecuación de Weber (2.18), la cual fue estudiada en el capítulo 2. Por el Lema 3.1 se tiene que

$$V(x)-\lambda=(x+a_0)^2+b_0,\quad a_0=q_1/2,\quad b_0=q_0-q_1^2/4-\lambda.$$

por lo tanto obtenemos $\pm b_0-1=2m$, donde $m\in\mathbb{Z}_+$. Si b_0 es un entero impar, entonces

$$G(L_\lambda/K)=\mathbb{B},\ \mathcal{E}(H-\lambda)=\mathrm{Vect}(1),$$

$$\lambda\in\Lambda=\{\pm(2m+1)+q_0-q_1^2/4:m\in\mathbb{Z}_+\}$$

y el conjunto de autofunciones es

$$\Psi_\lambda=P_me^{\frac{1}{2}(x^2+q_1x)},\ \textit{ó},\ \Psi_\lambda=P_me^{-\frac{1}{2}(x^2+q_1x)}.$$

En el segundo caso tenemos funciones de onda con estados ligados y

$$\mathrm{spec}_p(H)\cap\Lambda=\mathrm{spec}_p(H)=\{E_m=2m+1+q_0-q_1^2/4:m\in\mathbb{Z}_+\},$$

el cual es infinito. Los polinomios P_m están relacionados con los polinomios de Hermite H_m.

En particular tenemos el potencial del oscilador armónico $V(x)=x^2-1$. Es decir, $q_1=0$ y $q_0=-1$. En esta forma obtenemos el espectro algebraico $\Lambda=\{\pm(2m+1)-1:m\in\mathbb{Z}_+\}$ y el conjunto de autofunciones es

$$\Psi_\lambda=P_me^{\frac{1}{2}x^2},\ \textit{ó},\ \Psi_\lambda=P_me^{-\frac{1}{2}x^2},$$

donde como se mencionó anteriormente,

$$G(L_\lambda/K) = \mathbb{B}, \quad \mathcal{E}(H-\lambda) = \{1\}$$

para cada valor de $\lambda \in \Lambda$. En el segundo caso tenemos la función de onda correspondiente al estado base,

$$\operatorname{spec}_p(H) \cap \Lambda = \operatorname{spec}_p(H) = \Lambda_+ = \{2m : m \in \mathbb{Z}_+\}$$

y $P_m = H_m$. Las funciones de onda para $H\Psi = E\Psi$, la cual es la ecuación de Schrödinger con todos sus parámetros, están dadas por

$$\Psi_m = H_m\left(\sqrt{\frac{2}{\omega}}x\right)\Psi_0, \quad \Psi_0 = e^{-\frac{\omega}{4}x^2}, \quad E = E_m = m\omega.$$

Ejemplo. Osciladores Anarmónicos: Cuártico y Séxtico. La ecuación de Schrödinger con potencial

$$V(x) = x^4 + q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$$

puede ser obtenido mediante transformaciones de la ecuación confluente de Heun, lo cual no consideramos en este material. Por el Lema 3.1 se tiene que

$$V(x) - \lambda = (x^2 + a_1x + a_0)^2 + b_1x + b_0,$$

donde $a_1 = q_3/2$, $a_0 = q_2/2 - a_1^2/2$, $b_1 = q_1 - 2a_0a_1$ y $b_0 = q_0 - a_0^2 - \lambda$. Por lo tanto obtenemos $\pm b_1 - 2 = 2m$, donde $m \in \mathbb{Z}_+$. Si $\Lambda \neq \emptyset$, entonces b_1 es un entero par, el polinomio P_m satisface la relación algebraica del tercer paso del algoritmo de Kovacic para el caso 1 y

$$G(L_\lambda/K) = \mathbb{B}$$

para todo $\lambda \in \Lambda$. El conjunto de autofunciones es

$$\Psi_\lambda = P_m e^{\frac{x^3}{3} + \frac{a_1x^2}{2} + a_0x}, \text{ ó, } \Psi_\lambda = P_m e^{-\left(\frac{x^3}{3} + \frac{a_1x^2}{2} + a_0x\right)},$$

donde λ y m están relacionados, lo cual significa que Λ es finito, es decir, el potencial es algebraicamente casi-resoluble. En particular para $q_3 = 2\imath l$, $q_2 = l^2 - 2k$, $q_1 = 2\imath(lk - J)$ y $q_0 = 0$, tenemos el potencial del oscilador anarmónico cuártico.

Ahora bien, si consideramos los potenciales paramétricos

$$V(x,\mu) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - \mu x,$$

nuevamente por el Lema 3.1 tenemos que

$$V(x,\mu) - \lambda = (x^2 + 2x - 1)^2 + (4-\mu)x - 1 - \lambda,$$

por lo tanto $\pm(4-\mu) - 2 = 2n$, donde $n \in \mathbb{Z}_+$ y en consecuencia $\mu \in 2\mathbb{Z}$. Tal μ puede ser uno de los siguientes: $\mu = 2 - 2n$ ó $\mu = 2n + 6$, donde $n \in \mathbb{Z}_+$. Por el Teorema 3.15 existe un polinomio mónico P_n el cual satisface respectivamente la relación algebraica

$$\partial_x^2 P_n + (2x^2 + 4x - 2)\partial_x P_n + ((\mu - 2)x + 3 + \lambda)P_n = 0, \quad \mu = 2 - 2n,$$

ó la relación algebraica

$$\partial_x^2 P_n - (2x^2 + 4x - 2)\partial_x P_n + ((\mu - 6)x - 1 + \lambda)P_n = 0, \quad \mu = 2n + 6$$

para $\Lambda \neq \emptyset$. Estas relaciones algebraicas entre los coeficientes de P_n, μ y λ nos dan el espectro algebraico Λ en la siguiente forma:

1. Escribimos
$$P_n = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0,$$
donde los valores de c_i son desconocidos.

2. Tomamos μ y reemplazamos P_n en la relación algebraica para obtener un polinomio de grado n con $n+1$ coeficientes indeterminados que involucran a $c_0, \ldots c_{n-1}$ y λ. Cada uno de tales coeficientes debe ser cero.

3. El término $n+1$ es lineal en λ y c_{n-1}, de esta forma podemos escribir a c_{n-1} en términos de λ. Después de la eliminación del término $n+1$, reemplazamos c_{n-1} en el término n-ésimo para obtener un polinomio cuadrático en λ. De manera sucesiva, repetimos el procedimiento hasta llegar al término constante, el cual es un polinomio de grado $n+1$ en λ, que denotaremos por $Q_{n+1}(\lambda)$. De esta manera, el espectro algebraico está dado por $\Lambda = \{\lambda : Q_{n+1}(\lambda) = 0\}$ y $c_0, \ldots, c_{n-1}$ son determinados para cada valor de λ.

Para $\mu = 2n+6$, tenemos:

$$\begin{array}{llll} n=0, & V(x,6), & P_0 = 1, & \Lambda = \{1\} \\ n=1, & V(x,8), & P_1 = x+1 \mp \sqrt{2}, & \Lambda = \{3 \pm 2\sqrt{2}\} \\ \vdots & & & \end{array}$$

y el conjunto de autofunciones es

$$\Psi_{\lambda,\mu} = P_n e^{-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x}.$$

De la misma manera, podemos obtener Λ, P_n y $\Psi_{\lambda,\mu}$ para $\mu = 2-2n$. Sin embargo la solución no nos es útil en nuestro contexto cuántico ya que no tenemos estados ligados, es decir

$$\mathrm{spec}_p(H) \cap \Lambda = \emptyset,$$

aún cuando

$$G(L_\lambda/K) = \mathbb{B}, \quad \mathcal{E}(H-\lambda) = \mathrm{Vect}(1)$$

para todo $\lambda \in \Lambda$.

Después del artículo seminal de Turbiner, y posteriormente con los trabajos de Bender y Dunne, uno de los osciladores anarmónicos más conocidos es el *oscilador anarmónico séxtico*

$$x^6 + q_5 x^5 + \cdots + q_1 x + q_0,$$

el cual puede ser tratado en una forma similar como en el caso del cuártico. Con este enfoque se recuperan los resultados clásicos de Bender-Dunne, obteniendo las funciones de onda con estados ligados y los polinomios ortogonales de Bender-Dunne, cuyos ceros forman el espectro algebraico de este operador de Schrödinger . También se tiene que la ecuación de Schrödinger con este potencial, usando transformaciones adecuadas, también cae en una ecuación confluente de Heun.

Ahora consideraremos la ecuación de Schrödinger con potenciales racionales, es decir, el potencial es una función racional ($V(x) \in \mathbb{C}(x)$). La herramienta fundamental en este apartado es el Algoritmo de Kovacic.

Ejemplo. Oscilador Armónico Tridimensional. Este potencial es un ejemplo de lo que se conoce como potencial efectivo, el cual es dado por

$$V(r) = \frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \left(\ell + \frac{3}{2}\right)\omega, \quad \ell \in \mathbb{Z},$$

podemos que la ecuación de Schrödinger para este caso puede ser escrita como

$$\partial_r^2 \Psi = \left(\left(\frac{1}{2}\omega r\right)^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \left(\ell + \frac{3}{2}\right)\omega - E\right)\Psi.$$

Por el cambio de variable

$$r \mapsto \left(\sqrt{\frac{2}{\omega}}\right) r$$

obtenemos la ecuación de Schrödinger

$$\partial_r^2 \Psi = \left(r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - (2\ell+3) - \lambda\right)\Psi, \quad \lambda = \frac{2}{\omega}E$$

y para aplicar el Algoritmo de Kovacic establecemos:

$$R = r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - (2\ell+3) - \lambda.$$

Tal como podemos observar, esta ecuación puede caer en el caso 1, caso 2 o caso 4 del algoritmo de Kovacic. Comenzaremos por descartar el caso 2 del algoritmo de Kovacic porque por el paso 1 debemos tener las condiciones c_2 e ∞_3, de esta manera se tiene

$$E_c = \{2, 4+4\ell, -4\ell\}, \quad E_\infty = \{-2\},$$

y por el paso 2, se tiene que $n = -4 \notin \mathbb{Z}_+$, por lo tanto $D = \emptyset$. Es decir, esta ecuación de Schrödinger nunca cae en el caso 2.

Ahora bien, trabajando únicamente en el caso 1, por el paso 1, las condiciones c_2 e ∞_3 son satisfechas, por lo tanto

$$\left[\sqrt{R}\right]_c = 0, \quad \alpha_c^{\pm} = \frac{1 \pm (2\ell+1)}{2}, \quad \left[\sqrt{R}\right]_\infty = r, \quad \alpha_\infty^{\pm} = \frac{\mp(\lambda + 2\ell + 3) - 1}{2}.$$

Por el paso 2 tenemos las siguientes posibilidades para $n \in \mathbb{Z}_+$ y para $\lambda \in \Lambda$:

$$
\begin{array}{lll}
\Lambda_{++}) & n = \alpha_\infty^+ - \alpha_0^+ = -\frac{1}{2}\left(4\ell + 6 + \lambda\right), & \lambda = -2n - 4\ell - 6, \\
\Lambda_{+-}) & n = \alpha_\infty^+ - \alpha_0^- = -\frac{1}{2}\left(4 + \lambda\right), & \lambda = -2n - 4, \\
\Lambda_{-+}) & n = \alpha_\infty^- - \alpha_0^+ = \frac{\lambda}{2}, & \lambda = 2n, \\
\Lambda_{--}) & n = \alpha_\infty^- - \alpha_0^- = \frac{1}{2}\left(4\ell + 2 + \lambda\right), & \lambda = 2n - 4\ell - 2,
\end{array}
$$

donde $\Lambda_{++} \cup \Lambda_{+-} \cup \Lambda_{-+} \cup \Lambda_{--} = \Lambda$, lo cual significa que $\lambda = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$. Ahora, para $\lambda \in \Lambda$, la función racional ω en el Algoritmo de Kovacic es dada por:

$$
\begin{array}{lll}
\Lambda_{++}) & \omega = r + \frac{\ell+1}{r}, & R_n = r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + (2\ell + 3) + 2n, \\
\Lambda_{+-}) & \omega = r - \frac{\ell}{r}, & R_n = r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - (2\ell - 1) + 2n, \\
\Lambda_{-+}) & \omega = -r + \frac{\ell+1}{r}, & R_n = r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - (2\ell + 3) - 2n, \\
\Lambda_{--}) & \omega = -r - \frac{\ell}{r}, & R_n = r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + (2\ell - 1) - 2n,
\end{array}
$$

donde R_n es el coeficiente de la ecuación diferencial $\widetilde{\mathcal{L}}_n := \partial_r^2 \Psi = R_n \Psi$, la cual es integrable para todo n y para todo $\lambda \in \Lambda$. Por tanto, podemos ver que

$$G(\widetilde{L}_n/K) = G(L_\lambda/K),$$

donde $\mathcal{L}_\lambda := H\Psi = \lambda\Psi$ y $\lambda \in \Lambda$.

Por el paso 3, existe un polinomio mónico de grado n el cual satisface la relación algebraica:

$$
\begin{array}{llll}
\Lambda_{++}) & \partial_r^2 P_n + 2\left(r + \frac{\ell+1}{r}\right)\partial_r P_n - 2nP_n & = 0, & \lambda \in \Lambda_-, \\
\Lambda_{+-}) & \partial_r^2 P_n + 2\left(r - \frac{\ell}{r}\right)\partial_r P_n - 2nP_n & = 0, & \lambda \in \Lambda_-, \\
\Lambda_{-+}) & \partial_r^2 P_n + 2\left(-r + \frac{\ell+1}{r}\right)\partial_r P_n + 2nP_n & = 0, & \lambda \in \Lambda_+, \\
\Lambda_{--}) & \partial_r^2 P_n + 2\left(-r - \frac{\ell}{r}\right)\partial_r P_n + 2nP_n & = 0, & \lambda \in \Lambda.
\end{array}
$$

Estos polinomios existen para todo $\lambda \in \Lambda$ cuando sus grados son $n \in 2\mathbb{Z}$, mientras que para $n \in 2\mathbb{Z}+1$, ellos existen solamente para los casos $\Lambda_{-+})$ y $\Lambda_{--})$ con condiciones especiales. De esta manera, hemos obtenido el espectro algebraico $\Lambda = 2\mathbb{Z}$, donde

$$\Lambda_{++} = 4\mathbb{Z}_-, \quad \Lambda_{+-} = 2\mathbb{Z}_-, \quad \Lambda_{-+} = 4\mathbb{Z}_+, \quad \Lambda_{--} = 2\mathbb{Z}.$$

Las posibilidades para las funciones propias, o autofunciones, considerando solamente $\lambda \in 4\mathbb{Z}$, están dadas por

$$\begin{array}{llll}
\Lambda_{++}) & \Psi_n(r) & = & r^{\ell+1}P_{2n}(r)e^{\frac{r^2}{2}}, \quad \lambda \in \Lambda_-, \\
\Lambda_{+-}) & \Psi_n(r) & = & r^{-\ell}P_{2n}(r)e^{\frac{r^2}{2}}, \quad \lambda \in \Lambda_-, \\
\Lambda_{-+}) & \Psi_n(r) & = & r^{\ell+1}P_{2n}(r)e^{\frac{-r^2}{2}}, \quad \lambda \in \Lambda_+, \\
\Lambda_{--}) & \Psi_n(r) & = & r^{-\ell}P_{2n}(r)e^{\frac{-r^2}{2}}, \quad \lambda \in \Lambda.
\end{array}$$

Para obtener el espectro puntual, verificamos en las funciones Ψ_n a aquellas que satisfacen las condiciones de estados ligados. De esta forma observamos que solo hay estados ligados para $\lambda \in \Lambda_{-+}$. Con el cambio de variable $r \mapsto \sqrt{\frac{\omega}{2}}r$, el espectro puntual y el estado base de la ecuación de Schrödinger con potencial oscilador armónico tridimensional son respectivamente

$$\mathrm{spec}_p(H) = \{E_n : n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad E_n = 2n\omega,$$

donde ω es la velocidad angular y

$$\Psi_0 = \left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}r\right)^{\ell+1} e^{-\frac{\omega}{4}r^2}.$$

El estado base de la función de onda se obtiene como $\Psi_n = P_{2n}\Psi_0$. Ahora, podemos ver que

$$G(L_0/K) = \mathbb{B}, \quad \mathcal{E}(H) = \mathrm{Vect}(1).$$

Debido a que $\Psi_n = P_{2n}\Psi_0$, para todo $\lambda \in \Lambda$ tenemos que

$$G(L_\lambda/K) = \mathbb{B}, \quad \mathcal{E}(H-\lambda) = \mathrm{Vect}(1).$$

En particular,

$$G(L_\lambda/K) = \mathbb{B}, \quad \mathcal{E}(H-\lambda) = \mathrm{Vect}(1), \quad \forall\lambda \in \mathrm{spec}_p(H), \quad \lambda = \frac{2}{\omega}E.$$

Se recalca que la ecuación de Schrödinger con potencial oscilador armónico tridimensional, mediante los cambios de variable

$$r \mapsto \frac{1}{2}\omega r^2, \quad \Psi \mapsto \sqrt{r}\Psi,$$

cae en una ecuación diferencial de Whittaker (ecuación (2.14)) en donde los parámetros están dados por

$$\kappa = \frac{(2\ell+3)\omega + 2E}{4\omega}, \quad \mu = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{4}.$$

Aplicando el Teorema de Martinet-Ramis, podemos ver que la integrabilidad de la ecuación diferencial se tiene cuando $\pm\kappa\pm\mu$ sea un semi-entero. Estas condiciones coinciden con nuestros cuatro conjuntos $\Lambda_{\pm\pm}$.

Ejemplo. Potencial de Coulomb. El potencial de Coulomb que consideramos aquí está dado por

$$V(r) = -\frac{\mathrm{e}^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{\mathrm{e}^4}{4(\ell+1)^2}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Podemos ver que la ecuación de Schrödinger en este caso puede ser escrita como

$$\partial_r^2\Psi = \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{\mathrm{e}^2}{r} + \frac{\mathrm{e}^4}{4(\ell+1)^2} - E\right)\Psi.$$

Mediante el cambio de variable $r \mapsto \frac{2(\ell+1)}{\mathrm{e}^2}r$ podemos obtener la ecuación de Schrödinger

$$\partial_r^2\Psi = \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2(\ell+1)}{r} + 1 - \lambda\right)\Psi, \quad \lambda = \frac{4(\ell+1)^2}{\mathrm{e}^4}E.$$

De esta manera y para aplicar el Algoritmo de Kovacic, denotamos

$$R = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2(\ell+1)}{r} + 1 - \lambda.$$

Comenzaremos analizando el caso para $\lambda = 1$: podemos ver que esta ecuación solamente puede caer en el caso 2 o puede caer en el caso 4 del Algoritmo de Kovacic. Comenzaremos descartando el caso 2 porque por el paso 1 se tienen las condiciones c_2 e ∞_3. De esta manera tenemos

$$E_c = \{2, 4+4\ell, -4\ell\}, \quad E_\infty = \{1\}$$

y por el paso 2, tenemos que $n \notin \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $n \notin \mathbb{Z}_+$ y $D = \emptyset$, es decir, el grupo de Galois diferencial de esta ecuación de Schrödinger para $\lambda = 1$ es isomorfo a $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Ahora analizaremos el caso para $\lambda \neq 1$: podemos ver que esta ecuación puede caer en el caso 1, caso 2 o en el caso 4. Comenzaremos descartando el caso 2 porque por el paso 1 tenemos las condiciones c_2 e ∞_3, por lo tanto tenemos

$$E_c = \{2, 4+4\ell, -4\ell\}, \quad E_\infty = \{0\}.$$

Por el paso 2, debemos tener que $n = 2\ell \in \mathbb{Z}_+$, por lo tanto $D = \{2\ell\}$ y la función racional θ es dada por

$$\theta = \frac{-2\ell}{x},$$

pero descartamos este caso porque solo puede existir un polinomio de grado 2ℓ para un valor de ℓ fijo, por lo tanto solo habría una función propia para la ecuación de Schrödinger.

Ahora, solamente trabajaremos con el caso 1. Por el paso 1 las condiciones c_2 e ∞_3 son satisfechas. Así,

$$\left[\sqrt{R}\right]_c = 0, \quad \alpha_c^{\pm} = \frac{1 \pm (2\ell+1)}{2}, \quad \left[\sqrt{R}\right]_\infty = \sqrt{1-\lambda}, \quad \alpha_\infty^{\pm} = \mp\frac{\ell+1}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

Por el paso 2 tenemos las siguientes posibilidades para $n \in \mathbb{Z}_+$ y para

$\lambda \in \Lambda$:

$$\begin{array}{lll}
\Lambda_{++}) & n = \alpha_\infty^+ - \alpha_0^+ = -(\ell+1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\right), & \lambda = 1 - \left(\frac{\ell+1}{\ell+1+n}\right)^2, \\
\Lambda_{+-}) & n = \alpha_\infty^+ - \alpha_0^- = -\frac{\ell+1}{\sqrt{1-\lambda}} + \ell, & \lambda = 1 - \left(\frac{\ell+1}{\ell-n}\right)^2, \\
\Lambda_{-+}) & n = \alpha_\infty^- - \alpha_0^+ = (\ell+1)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - 1\right), & \lambda = 1 - \left(\frac{\ell+1}{\ell+1+n}\right)^2, \\
\Lambda_{--}) & n = \alpha_\infty^- - \alpha_0^- = \frac{\ell+1}{\sqrt{1-\lambda}} + \ell, & \lambda = 1 - \left(\frac{\ell+1}{\ell-n}\right)^2.
\end{array}$$

Podemos ver que $\lambda \in \Lambda_-$ cuando $\lambda \leq 0$, mientras que $\lambda \in \Lambda_+$ cuando $0 \leq \lambda < 1$. Además:

$$\Lambda_{++}) \quad \ell \leq -1, \quad \lambda \in \begin{cases} \Lambda_-, & \ell \leq \frac{-n-2}{2} \\ \Lambda_+, & \frac{-n-2}{2} \leq \ell \leq -1 \end{cases}$$

$$\Lambda_{+-}) \quad \ell > 0, \quad \lambda \in \begin{cases} \Lambda_-, & \ell \geq \frac{n-1}{2} \\ \Lambda_+, & 0 \leq \ell \leq \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

$$\Lambda_{-+}) \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \begin{cases} \Lambda_-, & \ell \leq \frac{-n-2}{2} \\ \Lambda_+, & \ell \geq -1 \end{cases}$$

$$\Lambda_{--}) \quad \ell > 0, \quad \lambda \in \begin{cases} \Lambda_-, & \ell \geq \frac{n-1}{2} \\ \Lambda_+, & 0 \leq \ell \leq \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

De esta manera, el espectro algebraico posible puede ser

$$\Lambda = \Lambda_{++} \cup \Lambda_{+-} \cup \Lambda_{-+} \cup \Lambda_{--},$$

es decir que el espectro algebraico Λ estaría dado por

$$\left\{1 - \left(\frac{\ell+1}{\ell+1+n}\right)^2 : n \in \mathbb{Z}_+\right\} \cup \left\{1 - \left(\frac{\ell+1}{\ell-n}\right)^2 : n \in \mathbb{Z}_+\right\}, \quad (3.37)$$

Ahora bien, para $\lambda \in \Lambda$, la funcón racional ω está dada por given by:

$$
\begin{array}{llll}
\Lambda_{++}) & \omega = \frac{\ell+1}{\ell+1+n} + \frac{\ell+1}{r}, & \lambda \in \Lambda_{++}, & R_n = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2(\ell+1)}{r} + \left(\frac{\ell+1}{\ell+1+n}\right)^2, \\
\Lambda_{+-}) & \omega = \frac{\ell+1}{\ell-n} - \frac{\ell}{r}, & \lambda \in \Lambda_{+-}, & R_n = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2(\ell+1)}{r} + \left(\frac{\ell+1}{\ell-n}\right)^2, \\
\Lambda_{-+}) & \omega = -\frac{\ell+1}{\ell+1+n} + \frac{\ell+1}{r}, & \lambda \in \Lambda_{-+}, & R_n = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2(\ell+1)}{r} + \left(\frac{\ell+1}{\ell+1+n}\right)^2, \\
\Lambda_{--}) & \omega = -\frac{\ell+1}{\ell-n} - \frac{\ell}{r}, & \lambda \in \Lambda_{--}, & R_n = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2(\ell+1)}{r} + \left(\frac{\ell+1}{\ell-n}\right)^2,
\end{array}
$$

donde R_n es el coeficiente de la ecuación diferencial $\partial_r^2\Psi = R_n\Psi$, la cual es integrable para todo valor de $n \in \mathbb{Z}_+$.

Por el paso 3, existe un polinomio de grado n que satisface la relación algebraica

$$
\begin{array}{lll}
\Lambda_{++}) & \partial_r^2 P_n + 2\left(\frac{\ell+1}{\ell+1+n} + \frac{\ell+1}{r}\right)\partial_r P_n + \frac{2(\ell+1)}{r}\left(1 + \frac{\ell+1}{\ell+1+n}\right)P_n & = 0, \\
\Lambda_{+-}) & \partial_r^2 P_n + 2\left(\frac{\ell+1}{\ell-n} - \frac{\ell}{r}\right)\partial_r P_n + \frac{2(\ell+1)}{r}\left(1 - \frac{\ell+1}{\ell-n}\right)P_n & = 0, \\
\Lambda_{-+}) & \partial_r^2 P_n + 2\left(-\frac{\ell+1}{\ell+1+n} + \frac{\ell+1}{r}\right)\partial_r P_n + \frac{2(\ell+1)}{r}\left(1 - \frac{\ell+1}{\ell+1+n}\right)P_n & = 0, \\
\Lambda_{--}) & \partial_r^2 P_n + 2\left(-\frac{\ell+1}{\ell-n} - \frac{\ell}{r}\right)\partial_r P_n + \frac{2(\ell+1)}{r}\left(1 + \frac{\ell+1}{\ell-n}\right)P_n & = 0.
\end{array}
$$

Estos polinomios existen para todo $\lambda \in \Lambda$ cuando $n \in \mathbb{Z}$, pero $P_0 = 1$ se satisface solamente para $\lambda \in \Lambda_{-+}$. De esta manera, hemos confirmado que el espectro algebraico Λ de esta ecuación de Schrödinger está dado por la relación (3.37).

Las posibilidades para las funciones propias son entonces

$$
\begin{array}{lllll}
\Lambda_{++}) & \Psi_n(r) & = & r^{\ell+1}P_n(r)f_n(r)e^{r}, & f_n(r)=e^{\frac{-nr}{\ell+1+n}}, \quad \lambda\in\begin{cases}\Lambda_-, & \ell\leq\frac{-n-2}{2}\\ \Lambda_+, & \frac{-n-2}{2}\leq\ell\leq -1\end{cases}\\
\Lambda_{+-}) & \Psi_n(r) & = & r^{-\ell}P_n(r)f_n(r)e^{r}, & f_n(r)=e^{\frac{n+1}{\ell-n}r}, \quad \lambda\in\begin{cases}\Lambda_-, & \ell\geq\frac{n-1}{2}\\ \Lambda_+, & 0\leq\ell\leq\frac{n-1}{2}\end{cases}\\
\Lambda_{-+}) & \Psi_n(r) & = & r^{\ell+1}P_n(r)f_n(r)e^{-r}, & f_n(r)=e^{\frac{nr}{\ell+1+n}}, \quad \lambda\in\begin{cases}\Lambda_-, & \ell\leq\frac{-n-2}{2}\\ \Lambda_+, & \ell\geq -1\end{cases}\\
\Lambda_{--}) & \Psi_n(r) & = & r^{-\ell}P_n(r)f_n(r)e^{-r}, & f_n(r)=e^{\frac{n+1}{n-\ell}r}, \quad \lambda\in\begin{cases}\Lambda_-, & \ell\geq\frac{n-1}{2}\\ \Lambda_+, & 0\leq\ell\leq\frac{n-1}{2}\end{cases}
\end{array}
$$

pero Ψ_n debe satisfacer las condiciones de estados ligados, las cuales son verdaderas solamente para $\lambda\in\Lambda_{-+}\cap\Lambda_+$, así que podemos escoger $\Lambda_{-+}\cap\Lambda_+=\mathrm{spec}_p(H)$, esto es

$$\mathrm{spec}_p(H)=\left\{1-\left(\frac{\ell+1}{\ell+n+1}\right)^2: \quad n\in\mathbb{Z}_+, \quad \ell\geq -1\right\}.$$

Por el cambio de variable $r\mapsto\frac{\mathrm{e}^2}{2(\ell+1)}r$, el espectro puntual y estado base de la ecuación de Schrödinger con potencial de Coulomb son respectivamente

$$\mathrm{spec}_p(H)=\{E_n : n\in\mathbb{Z}_+\}, \quad E_n=\frac{\mathrm{e}^4}{4}\left(\frac{1}{(\ell+1)^2}-\frac{1}{(\ell+1+n)^2}\right)$$

y

$$\Psi_0=\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2(\ell+1)}r\right)^{\ell+1}e^{-\frac{\mathrm{e}^2}{2(\ell+1)}r}.$$

Los estados propios están dados por $\Psi_n=P_nf_n\Psi_0$, donde

$$f_n(r)=e^{\frac{n\mathrm{e}^2r}{2(\ell+1+n)(\ell+1)}}.$$

Ahora, podemos ver que $G(L_0/K)=\mathbb{B}$ y $\mathcal{E}(H)=\mathrm{Vect}(1)$. Debido a que $\Psi_n=P_{2n}f_n\Psi_0$, para todo $\lambda\in\Lambda$ tenemos que $G(L_\lambda/K)=\mathbb{B}$ y $\mathcal{E}(H-\lambda)=\mathrm{Vect}(1)$. En particular,

$$G(L_E/K)=\mathbb{B}, \quad \mathcal{E}(H-\lambda)=\mathrm{Vect}(1), \quad \forall E\in\mathrm{spec}_p(H),$$

donde $E=\frac{\mathrm{e}^4}{4(\ell+1)^2}\lambda$.

Observamos que al igual que en el caso del oscilador armónico tridimensional, la ecuación de Schrödinger con potencial de Coulomb, a través del cambio de variable

$$r \mapsto \frac{\sqrt{-4\ (\ell+1)^2\, E + \mathrm{e}^4}}{\ell+1} r,$$

cae en una ecuación diferencial de Whittaker (ecuación (2.14)) en donde los parámetros están dados por

$$\kappa = \frac{\mathrm{e}^2\,(\ell+1)}{\sqrt{-4\ (\ell+1)^2\, E + \mathrm{e}^4}}, \quad \mu = \ell + \frac{1}{2}.$$

Aplicando el teorema de Martinet-Ramis se impone que $\pm\kappa \pm \mu$ sea un semi-entero y por lo tanto obtenemos nuestros cuatro conjuntos $\Lambda_{\pm\pm}$.

Se puede observar que hay una especie de equivalencia algebraica entre el potencial de Coulomb y el potencial del oscilador armónico tridimensional, puesto que se puede encontrar una transformación adecuada que lleve una ecuación de Schrödinger a otra. Por otra parte, los grupos de Galois diferencial de la ecuación de Schrödinger con potencial de Coulomb fueron analizados por Jean-Pierre Ramis, en la década de los 80's del siglo pasado, usando su teoría de sumabilidad.

Por aplicación directa del algoritmo de Kovacic tenemos:

- La ecuación de Schrödinger (3.35) con potencial

  $$V(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}$$

  es integrable para $\lambda \in \Lambda$ cuando

  - $a = 0, \quad b = \mu(\mu+1), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad \Lambda = \mathbb{C},$
  - $a = 1, \quad b = 0, \quad \lambda \in \Lambda = 2\mathbb{Z}+1,$
  - $a = 1, \quad b = \ell(\ell+1), \quad \ell \in \mathbb{Z}^*, \Lambda = 2\mathbb{Z}+1.$

- Los únicos potenciales racionales (salvo transformaciones) en el cual los elementos del espectro algebraico está equi-espaciados, es decir que dos elementos consecutivos están a la misma distancia, pertenecen a la familia de potenciales dados por

$$V(x) = \sum_{k=-\infty}^{2} a_k x^k, \quad a_2 \neq 0.$$

En particular, los elementos del espectro algebraico Λ para el oscilador armónico ($a = 1$, $b = 0$) y para oscilador armónico tridimensional ($a = 1$, $b = \ell(\ell + 1)$) satisfacen esto.

Los siguientes dos teoremas, los cuales pueden consultarse en [1, 2, 12], descartan la posibilidad de que la Ecuación de Schrödinger que caiga en el caso 3 del algoritmo de Kovacic tenga potenciales algebraicamente resolubles o algebraicamente casi-resolubles no triviales.

Teorema 3.17. *Sea $\mathcal{L}_\lambda$ la ecuación de Schrödinger* (3.35) *con cuerpo diferencial $K = \mathbb{C}(x)$ y extensión de Picard-Vessiot L_λ. Si $G(L_0/K)$ es finito y primitivo, entonces $G(L_\lambda/K)$ no es finito y primitivo para todo $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$.*

Demostración Seleccionemos $V \in \mathbb{C}(x)$ tal que $\mathcal{L}_0$ cae en el caso 3 del algoritmo de Kovacic, entonces $\circ u_\infty \geq 2$. Asumamos que $t, s \in \mathbb{C}[x]$ son tales que $V = \frac{s}{t}$, entonces

$$\mathrm{grad}(t) \geq \mathrm{grad}(s) + 2 \text{ y } V - \lambda = \frac{s - \lambda t}{t}.$$

Ahora bien, para $\lambda \neq 0$ tenemos que $\deg(s - \lambda t) = \deg(t)$ y por lo tanto $\circ(V - \lambda)_\infty = 0$. Por lo tanto $\lambda \neq 0$, la ecuación $\mathcal{L}_\lambda$ no cae en el caso 3 del algoritmo de Kovacic, lo cual nos conduce a que $G(L_\lambda/K)$ no es primitivo finito. $\square$

Teorema 3.18. *Sea $\mathcal{L}_\lambda$ la ecuación de Schrödinger* (3.35) *con $K = \mathbb{C}(x)$ y extensión de Picard-Vessiot L_λ. Si* $\mathrm{Card}(\Lambda) > 1$*, entonces puede suceder que cero o un valor de λ hacen que $G(L_\lambda/K)$ sea un grupo finito primitivo.*

Demostración. Asumanos que $\mathrm{Card}(\Lambda) > 1$. Por lo tanto, por el Teorema 3.17, la ecuación de Schrödinger no cae en el caso 3 del Algoritmo de Kovacic. $\square$

Hasta el momento hemos estudiado la integrabilidad de la ecuación de Schrödinger con potenciales racionales. La situación se complica bastante cuando los potenciales no son funciones racionales tales como los potenciales de Morse, Rosen-Morse, Poschl-Teller, entre otros. Para resolver este problema usamos la Algebrización Hamiltoniana. Es decir, utilizaremos la *derivación sombrero* $\widehat{\partial}_z$ en la ecuación de Schrödinger

$$H\Psi = \lambda\Psi, \quad H = -\partial_x^2 + V(x), \quad V \in K.$$

Supongamos que $z = z(x)$ es un cambio de variable Hamiltoniano racional para $H\Psi = \lambda\Psi$, entonces

$$K = \mathbb{C}(z(x), \partial_x z(x)).$$

Por lo tanto, la *ecuación algebrizada de Schrödinger* es escrita como

$$\widehat{H}\widehat{\Psi} = \lambda\widehat{\Psi}, \quad \widehat{H} = -\widehat{\partial}_z^2 + \widehat{V}(z), \quad \widehat{\partial}_z^2 = \alpha\partial_z^2 + \frac{1}{2}\partial_z\alpha\partial_z, \tag{3.38}$$

siendo

$$\widehat{K} = \mathbb{C}(z, \sqrt{\alpha}).$$

La *ecuación algebrizada de Schrödinger reducida*, está dada por

$$\widehat{\mathbf{H}}\Phi = \lambda\Phi, \quad \widehat{\mathbf{H}} = \alpha(z)\left(-\partial_z^2 + \widehat{\mathbf{V}}(z)\right), \quad \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{V}}(z) = \mathcal{V} + \frac{\widehat{V}(z)}{\alpha}, \\ \mathcal{V} = \partial_z\mathcal{W} + \mathcal{W}^2, \\ \mathcal{W} = \frac{1}{4}\frac{\partial_z\alpha(z)}{\alpha(z)}. \end{array} \tag{3.39}$$

Las funciones propias Ψ, $\widehat{\Psi}$ y Φ correspondiente a los operadores H, $\widehat{H}$ y $\widehat{\mathbf{H}}$ están respectivamente relacionadas como

$$\Phi(z(x)) = \sqrt[4]{\alpha}\widehat{\Psi}(z(x)) = \sqrt[4]{\alpha}\Psi(x).$$

Para poder aplicar el algoritmo de Kovacic, consideraremos solamente el operador algebrizado $\widehat{\mathbf{H}}$, mientras que los autoanillos diferenciales serán calculados sobre $\widehat{H}$. También es posible aplicar la mejora del algoritmo de Kovacic propuesta por Ulmer - Weil sobre el operador algebrizado $\widehat{H}$.

Los siguientes resultados, ver [1, 2, 12], fueron obtenidos mediante aplicación directa del Algoritmo de Kovacic a la ecuación algebrizada de Schrödinger reducida (ecuación (3.39)) $\widehat{\mathbf{H}}\Phi = \lambda\Phi$.

Teorema 3.19. *Sea $\widehat{\mathbf{L}}_\lambda$ la extensión de Picard-Vessiot de la ecuación algebrizada y reducida de Schrödinger $\widehat{\mathbf{H}}\Phi = \lambda\Phi$ con $\alpha, \widehat{V} \in \mathbb{C}[z]$. Si $\deg\alpha < 2 + \deg\widehat{V}$, entonces $\mathrm{DGal}(\widehat{\mathbf{L}}/\widehat{K})$ no es un grupo finito primitivo para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Supongamos que $\deg\alpha = n$ y $\deg\widehat{V} = m$. La ecuación algebrizada de Schrödinger reducida $\widehat{\mathbf{H}}\Phi = \lambda\Phi$ puede ser escrita en la forma

$$\partial_z^2\Phi = r\Phi, \quad r = \frac{4\alpha\partial_z^2\alpha - 3(\partial_z\alpha)^2 + 16\alpha(\widehat{V} - \lambda)}{16\alpha^2}.$$

Debido a que $m > n - 2$ tenemos que $\circ(r_\infty) = n - m < 2$, el cual no satisface la condición (∞) del caso 3 del algoritmo de Kovacic, sin embargo $G(\widehat{\mathbf{L}}/\widehat{K})$ no es un grupo primitivo finito para todo $\lambda \in \Lambda$. □

Teorema 3.20. *Sea $\widehat{\mathbf{L}}_\lambda$ la extensión de Picard-Vessiot de la ecuación algebrizada reducida de Schrödinger $\widehat{\mathbf{H}}\Phi = \lambda\Phi$, siendo $\alpha \in \mathbb{C}[z]$ y $\widehat{V} \in \mathbb{C}(z)$. Si $\circ(\widehat{V})_\infty < 2 - \deg\alpha$, entonces $G(\widehat{\mathbf{L}}_\lambda/\widehat{K})$ no es un grupo primitivo finito para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Supongamos que $\widehat{V} = s/t$, siendo s y t polinomios coprimos en $\mathbb{C}(z)$. Asumamos que $\mathrm{grad}\alpha = n$, $\mathrm{grad}s = m$ and $\mathrm{grad}t = p$. La ecuación algebrizada reducida de Schrödinger $\widehat{\mathbf{H}}\Phi = \lambda\Phi$ puede ser escrita en la forma

$$\partial_z^2\Phi = r\Phi, \quad r = \frac{4t\alpha\partial_z^2\alpha - 3t(\partial_z\alpha)^2 + 16\alpha(s - \lambda t)}{16t\alpha^2}.$$

Debido a que $m > n + p - 2$ tenemos que $\circ(r_\infty) = p + n - m < 2$, lo cual no satisface la condición (∞) del caso 3 del algoritmo de Kovacic. Por lo tanto $G(\widehat{\mathbf{L}}/\widehat{K})$ no es un grupo primitivo finito para todo $\lambda \in \Lambda$.

Ahora para ilustrar la potencia del Algoritmo de Kovacic con la derivación sombrero $\widehat{\partial}_z$, estudiamos la ecuación de Schrödinger con un caso particular del potencial de Morse. El caso general también puede ser estudiado utilizando la maquinaria del Algoritmo de Kovacic y la Algebrización Hamiltoniana.

Ejemplo. Potencial de Morse. El potencial de Morse que consideramos aquí está dado por

$$V(x) = e^{-2x} - e^{-x}.$$

La ecuación de Schrödinger $H\Psi = \lambda\Psi$ es

$$\partial_x^2\Psi = \left(e^{-2x} - e^{-x} - \lambda\right)\Psi.$$

Por el cambio de variable Hamiltoniano $z = z(x) = e^{-x}$, obtenemos

$$\alpha(z) = z^2, \quad \widehat{V}(z) = z^2 - z, \quad \widehat{\mathbf{V}}(z) = \frac{z^2 - z - \frac{1}{4}}{z^2}.$$

Por lo tanto, $\widehat{K} = \mathbb{C}(z)$ y $K = \mathbb{C}(e^x)$. De esta manera, la ecuación algebrizada de Schrödinger $\widehat{H}\widehat{\Psi} = \lambda\widehat{\Psi}$ está dada por

$$z^2\partial_z^2\widehat{\Psi} + z\partial_z\widehat{\Psi} - (z^2 - z - \lambda)\widehat{\Psi} = 0$$

y la ecuación algebrizada reducida de Schrödinger $\widehat{\mathbf{H}}\widehat{\Phi} = \lambda\widehat{\Phi}$ está dada por

$$\partial_z^2\Phi = r\Phi, \quad r = \frac{z^2 - z - \frac{1}{4} - \lambda}{z^2}.$$

Esta ecuación solamente puede caer en los casos 1, 2 o 4 del Algoritmo de Kovacic. Empezaremos analizando el caso 1: por las condiciones c_2 e ∞_3 tenemos que

$$\left[\sqrt{r}\right]_0 = 0, \quad \alpha_0^{\pm} = \frac{1 \pm 2\sqrt{-\lambda}}{2}, \quad \left[\sqrt{r}\right]_\infty = 1, \quad \text{and} \quad \alpha_\infty^{\pm} = \mp\frac{1}{2}.$$

Por el paso 2 tenemos las siguientes posibilidades para $n \in \mathbb{Z}_+$ y para $\lambda \in \Lambda$:

$$\begin{array}{lll}
\Lambda_{++}) & n = \alpha_\infty^+ - \alpha_0^+ = -1 - \sqrt{-\lambda}, & \lambda = -\left(n+1\right)^2, \\
\Lambda_{+-}) & n = \alpha_\infty^+ - \alpha_0^- = -1 + \sqrt{-\lambda}, & \lambda = -\left(n+1\right)^2, \\
\Lambda_{-+}) & n = \alpha_\infty^- - \alpha_0^+ = -\sqrt{-\lambda}, & \lambda = -n^2, \\
\Lambda_{--}) & n = \alpha_\infty^- - \alpha_0^- = \sqrt{-\lambda}, & \lambda = -n^2.
\end{array}$$

Podemos ver que $\lambda \in \Lambda_- = \{-n^2 : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Ahora bien, para $\lambda \in \Lambda$, la función racional ω está dada por:

$$\begin{array}{lllll}
\Lambda_{++}) & \omega = 1 + \frac{3+2n}{2z}, & \lambda \in \Lambda_{++}, & r_n = \frac{4n^2+8n+3}{4z^2} + \frac{2n+3}{z} + 1, \\
\Lambda_{+-}) & \omega = 1 - \frac{1+2n}{2z}, & \lambda \in \Lambda_{+-}, & r_n = \frac{4n^2+8n+3}{4z^2} - \frac{2n+1}{z} + 1, \\
\Lambda_{-+}) & \omega = -1 + \frac{1+2n}{2z}, & \lambda \in \Lambda_{-+}, & r_n = \frac{4n^2-1}{4z^2} - \frac{2n+1}{z} + 1, \\
\Lambda_{--}) & \omega = -1 + \frac{1-2n}{2z}, & \lambda \in \Lambda_{--}, & r_n = \frac{4n^2-1}{4z^2} + \frac{2n-1}{z} + 1,
\end{array}$$

donde r_n es el coeficiente de la ecuación diferencial $\partial_z^2\Phi = r_n\Phi$.

Por el paso 3, debiera existir un polinomio mónico de grado n, el cual debe satisfacer la relación algebraica

$$\begin{array}{lll}
\Lambda_{++}) & \partial_z^2\widehat{P}_n + 2\left(1 + \frac{3+2n}{2z}\right)\partial_z\widehat{P}_n + \frac{2(n+2)}{z}\widehat{P}_n & = 0, \\
\Lambda_{+-}) & \partial_z^2\widehat{P}_n + 2\left(1 - \frac{1+2n}{2z}\right)\partial_z\widehat{P}_n + \frac{2(-n)}{z}\widehat{P}_n & = 0, \\
\Lambda_{-+}) & \partial_z^2\widehat{P}_n + 2\left(-1 + \frac{1+2n}{2z}\right)\partial_z\widehat{P}_n + \frac{2(-n)}{z}\widehat{P}_n & = 0, \\
\Lambda_{--}) & \partial_z^2\widehat{P}_n + 2\left(-1 + \frac{1-2n}{2z}\right)\partial_z\widehat{P}_n + \frac{2n}{z}\widehat{P}_n & = 0.
\end{array}$$

Estos polinomios existen solamente para $n = \lambda = 0$, con $\lambda \in \Lambda_{-+} \cup \Lambda_{--}$. Por lo tanto las soluciones de $H\Psi = 0$, $\widehat{H}\widehat{\Psi} = 0$ y $\widehat{\mathbf{H}}\Phi = 0$ están dadas por

$$\Phi_0 = \sqrt{z}e^{-z}, \quad \widehat{\Psi}_0 = e^{-z}, \quad \Psi = e^{-e^{-x}}.$$

La función de onda Ψ_0 satisface las condiciones para ser estado base y por lo tanto $0 \in \mathrm{spec}_p(H)$. Además se tiene que

$$G(L_0/K) = G(\widehat{L}_0/\widehat{K}) = G(\widehat{\mathbf{L}}_0/\mathbb{C}(z)) = \mathbb{B},$$

$$\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(\widehat{H}) = \mathcal{E}(\widehat{\mathbf{H}}) = \mathrm{Vect}(1).$$

Continuamos ahora con el caso 2. Por el paso 1 las condiciones c_2 e ∞_3 se satisfacen, de esta manera tenemos que

$$E_c = \left\{2, 2 + 4\sqrt{-\lambda}, 2 - 4\sqrt{-\lambda}\right\} \quad \text{y} \quad E_\infty = \{0\},$$

y por el paso 2 tenemos que $2 \pm \sqrt{-\lambda} = m \in \mathbb{Z}_+$, así que

$$\lambda = -\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$$

y la función racional θ tiene las siguientes posibilidades

$$\theta_+ = \frac{2+m}{z}, \quad \theta_- = -\frac{m}{z}.$$

Por el paso 3, debe existir un polinomio mónico de grado m, el cual satisface la relación algebraica

$$\theta_+)\ \partial_z^3 \widehat{P}_m + \tfrac{3m+6}{z}\partial_z^2 \widehat{P}_m - \tfrac{4z^2-4z-2m^2-7m-6}{z^2}\partial_z \widehat{P}_m - \tfrac{4mz+8z-4m-6}{z^2}\widehat{P}_m = 0,$$

$$\theta_-)\ \partial_z^3 \widehat{P}_m - \tfrac{3m}{z}\partial_z^2 \widehat{P}_m - \tfrac{4z^2-4z-2m^2-m}{z^2}\partial_z \widehat{P}_m + \tfrac{4mz-4m-2}{z^2}\widehat{P}_m = 0.$$

Podemos ver que para $m = 1$ el polinomio existe solo para el caso θ_-, siendo $\widehat{P}_1 = z - 1/2$. En general, estos polinomios podrían existir solamente para el caso θ_- con $m = 2n-1$, $n \geq 1$, es decir

$$\lambda \in \{-n^2 : n \geq 1\}.$$

Por lo tanto, por casos 1 y 2 del algoritmo de Kovacic, obtenemos que

$$\Lambda = \{-n^2 : n \geq 0\} = \mathrm{spec}_p(H).$$

Ahora bien, la función racional ϕ y la expresión cuadrática para ω son

$$\phi = -\frac{2n-1}{z} + \frac{\partial_z \widehat{P}_{2n-1}}{\widehat{P}_{2n-1}}, \quad \omega^2 + M\omega + N = 0, \quad \omega = \frac{-M \pm \sqrt{M^2-4N}}{2},$$

donde los coeficientes M y N están dados por

$$M = \frac{2n-1}{z} - \frac{\partial_z \widehat{P}_{2n-1}}{\widehat{P}_{2n-1}}$$

y por

$$N = \frac{n^2 - n + \frac{1}{4}}{z^2} - \frac{(2n-1)\frac{\partial_z \widehat{P}_{2n-1}}{\widehat{P}_{2n-1}} - 2}{z} + \frac{\partial_z^2 \widehat{P}_{2n-1}}{\widehat{P}_{2n-1}} - 2.$$

De esta manera, $\triangle = M^2 - 4N \neq 0$, lo cual significa que $\widehat{\mathbf{H}}\Phi = -n^2\Phi$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ tiene dos soluciones dadas por el algoritmo de Kovacic:

$$\Phi_{1,n} = \frac{\sqrt{z}\widehat{P}_n e^{-z}}{z^n}, \quad \Phi_{2,n} = \frac{\sqrt{z}\widehat{P}_{n-1} e^{z}}{z^n}.$$

Las soluciones de $\widehat{H}\widehat{\Psi} = -n^2\widehat{\Psi}$ están dadas por

$$\widehat{\Psi}_{1,n} = \frac{\widehat{P}_n e^{-z}}{z^n}, \quad \widehat{\Psi}_{2,n} = \frac{\widehat{P}_{n-1} e^{z}}{z^n},$$

y por lo tanto las soluciones de la ecuación de Schrödinger $H\Psi = -n^2\Psi$ son

$$\Psi_{1,n} = P_n e^{-e^{-x}} e^{nx}, \quad \Psi_{2,n} = P_{n-1} e^{e^{-x}} e^{nx}, \quad P_n = \widehat{P}_n \circ z.$$

Las funciones de onda $\Psi_{1,n} = \Psi_n$ satisfacen las condiciones de estados ligados, y para $n = 0$, esta solución coincide con el estado base presentado antes. Por lo tanto tenemos que

$$\Phi_n = \Phi_0 \widehat{f}_n \widehat{P}_n, \quad \widehat{\Psi}_n = \widehat{\Psi}_0 \widehat{f}_n \widehat{P}_n, \quad \widehat{f}_n(z) = \frac{1}{z^n}.$$

De esta manera, las funciones de onda de estados ligados son obtenidas como

$$\Psi_n = \Psi_0 f_n P_n, \quad f_n(x) = \widehat{f}_n(e^{-x}) = e^{nx}.$$

Los autoanillos diferenciales y los grupos de Galois diferenciales para $n > 0$ satisfacen

$$G(L_n/K) = G(\widehat{L}_n/\widehat{K}) = G(\widehat{\mathbf{L}}_n/\mathbb{C}(z)) = \mathbb{G}_m,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}(\widehat{\mathbf{H}} + n^2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}(\widehat{H} + n^2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}(H + n^2) = 2.$$

Debemos dejar claro que la ecuación de Schrödinger con potencial de Morse, bajo cambios adecuados de variables, cae en una ecuación diferencial de Bessel. Así que podemos obtener su integrabilidad como fue estudiada en el capítulo 2. Además, de lo anterior, es bien conocido que la integrabilidad de esta ecuación diferencial fue estudiada también en el libro clásico de Mecánica Cuántica de Landau-Lifshitz, en donde ellos también algebrizan la ecuación, obtienen la ecuación de Bessel y la resuelven.

3.4 Ejercicios

1. Estudiar la integrabilidad de los campos vectoriales polinomiales del plano formado por polinomios homogéneos del mismo grado.

2. Retomar el problema de Sitnikov en el caso de la órbita de colisión triple y verificar que las singularidades de la ecuación diferencial con coeficientes funciones racionales, que proviene de la ecuación variacional normal son de tipo regular. Luego aplique el Teorema de Kimura y demuestre la no integrabilidad de este sistema Hamiltoniano .

2. Estudiar la integrabilidad de la ecuación de Schrödinger con potencial de Morse

$$V(x) = e^{-4x} - 2e^{-2x}.$$

CAPÍTULO 4

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. Sea $K = \mathbb{Q}$ y $p(x) = x^2 + 2$. Determine el grupo de Galois de este polinomio $(G(L/K))$.

2. Demuestre que las funciones racionales, con la suma y producto usual, forman un cuerpo. Demuestre que este cuerpo es diferencial con la derivación usual.

3. Dada la ecuación diferencial

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

encuentre un cambio de variable para transformarla en una ecuación de la forma

$$z''' + b_1(x)z' + b_0(x)z = 0.$$

Encuentre explícitamente las funciones b_0 y b_1.

4. Resuelva la ecuación de Riccati

$$v' = 1 - v^2.$$

5. Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' = (x^{10} - 5x^5)y$$

y determine el grupo de Galois diferencial.

6. Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' = (1 - \sin x - \sin^2 x)y$$

y determine el grupo de Galois diferencial.

7. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = r(\tau)\eta,\ r(\tau) = \frac{4\omega\tau^4 - (6+4\omega)\tau^2 + 3}{4\tau^2(\tau-1)^2(\tau+1)^2},$$

determine, mediante el teorema de Kimura, los valores de ω para que esta ecuación diferencial sea integrable.

8. Considere el siguiente sistema polinomial de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= 2xy - xy^3 \end{aligned}$$

Determine el campo polinomial, curvas algebraicas invariantes, factor integrante, factor exponencial, cofactores, invariantes e integrales primeras del campo.

9. Calcule al autoanillo diferencial de la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

10. Demuestre que el cambio de variable $z = 1/x$ es Hamiltoniano y escriba la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en términos de la variable z.

11. Verifique que la ecuación diferencial de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

satisface las condiciones del teorema de Kimura y determine los valores del parámetro que hacen que esta ecuación diferencial sea integrable. Resuelva la ecuación mediante el algoritmo de Kovacic y compare los resultados.

12. Resuelva la ecuación de Schrödinger

$$\Psi'' = \left(\frac{1}{x} - \lambda\right)\Psi$$

mediante el algoritmo de Kovacic. Determine el espectro algebraico y el grupo de Galois diferencial de esta ecuación.

13. Dado el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}$$

Demuestre que $W' + (a+d)W = 0$, donde W es el wronskiano de las soluciones del sistema.

14. Considere el siguiente Hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2 + p^2}{4} + \frac{q_1^3 q_2^2}{4}.$$

Aplique la teoría de Morales-Ramis y demuestre que el campo Hamiltoniano no es integrable mediante integrales primeras racionales.

15. Considere el siguiente Hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2 + p^2}{2} + \frac{1}{q_1 + q_2}.$$

Aplique la teoría de Morales-Ramis y demuestre que el campo Hamiltoniano no es integrable mediante integrales primeras meromorfas.

16. Resuelva la ecuación de Schrödinger

$$\Psi'' = \left(\frac{x^2}{4} - \lambda\right)\Psi$$

mediante el algoritmo de Kovacic. Determine el espectro algebraico y el grupo de Galois diferencial de esta ecuación.

17. Considere el siguiente Hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2 + p^2}{4} + \frac{q_1^4 q_2^2}{4}.$$

Aplique la teoría de Morales-Ramis y demuestre que el campo Hamiltoniano no es integrable mediante integrales primeras racionales.

18. Resuelva la ecuación de Schrödinger

$$\Psi'' = \left(x^2 + \frac{12}{x^2} - \lambda\right)\Psi$$

mediante el algoritmo de Kovacic. Determine el espectro algebraico y el grupo de Galois diferencial de esta ecuación.

19. Considere el siguiente sistema polinomial de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= x^2 - 3 - y^2 \end{aligned}$$

Determine el campo polinomial, curvas algebraicas invariantes, factor integrante, factor exponencial, cofactores, invariantes e integrales primeras del campo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] P. B. Acosta-Humánez, *Galoisian Approach to Supersymmetric Quantum Mechanics*, PhD. Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2009. Arxiv: http://arxiv.org/abs/0906.3532

[2] P. B. Acosta-Humánez, *Galoisian Approach to Supersymmetric Quantum Mechanics: The Integrability Analysis of the Schrödinger Equation by means of Differential Galois Theory*, VDM Verlag, Dr. Müller, Berlín, 2010.

[3] P. B. Acosta-Humanez, *La Teoría de Morales-Ramis y el Algoritmo de Kovacic*, Lecturas Matemáticas, **NE** (2006), 21–56

[4] P. B. Acosta-Humanez, *Nonautonomous Hamiltonian Systems and Morales-Ramis Theory I. The Case* $\ddot{x} = f(x, t)$, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, **8** (2009), 279–297

[5] P. B. Acosta-Humánez, M. Álvarez-Ramírez, D. Blázquez-Sanz & J. Delgado, *Non-integrability criterium for normal variational equations around an integrable subsystem and an example: The Wilberforce spring-pendulum*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (DCDS-A), **33** (2013), 965–986

[6] P. Acosta-Humánez, M. Álvarez-Ramírez & J. Delgado, *Non-Integrability of some few body problems in two degrees of freedom*, Qual. Theory Dyn. Syst. **8** (2009), no. 2, 209–239

[7] P. Acosta-Humánez & D. Blázquez-Sanz, *Hamiltonian system and variational equations with polynomial coefficients*, Dynamic systems and applications, Dynamic, Atlanta, GA, Vol. **5**, (2008) 6–10

[8] P. Acosta-Humánez & D. Blázquez-Sanz, *Non-integrability of some Hamiltonians with rational potentials*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, **10**, (2008), 265–293.

[9] P. B. Acosta-Humánez, D. Blázquez-Sanz & C. Vargas-Contreras, *On Hamiltonian potentials with quartic polynomial normal variational equations*, Nonlinear Studies. The international journal, **16** (2009), 299–313

[10] P.B. Acosta-Humanez, S.I. Kryuchkov, A. Mahalov, E. Suazo & S.K. Suslov, *Degenerate Parametric Amplification of Squeezed Photons: Explicit Solutions, Statistics, Means and Variances*, Preprint, Arxiv: http://arxiv.org/abs/1311.2479, 2013

[11] P. B. Acosta-Humánez, J.T. Lázaro, J. Morales-Ruiz & Ch. Pantazi, *On the integrability of polynomial vector fields in the plane by means of Picard-Vessiot theory*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (DCDS-A), **35** (2015), 1767–1800

[12] P. B. Acosta-Humánez, J.J Morales-Ruiz & J.-A. Weil, *Galoisian approach to integrability of Schrödinger equation*, Report on Mathematical Physics, **67**, (2011), 305–374.

[13] P. B. Acosta-Humánez & Ch. Pantazi, *Darboux Integrals for Schrödinger Planar Vector Fields via Darboux Transformations*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), **8**, (2012), 043, 26 pages

[14] P. Acosta-Humánez & J. H. Pérez, *Teoría de Galois diferencial: una aproximación*, Mat. Ensen. Univ. (N. S.), **15** (2007), 91–102.

[15] P. Acosta-Humánez & J. H. Pérez, *Una introducción a la Teoría de Galois diferencial*, Bol. Mat. (N.S.), **11** (2004), 138–149.

[16] P. B. Acosta-Humánez & E. Suazo, *Liouvillian Propagators and Degenerate Parametric Amplification with Time-Dependent Pump Amplitude and Phase*, Analysis, Modelling, Optimization, and Numerical Techniques, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, **121** 2015.

[17] P. B. Acosta-Humánez & E. Suazo, *Liouvillian propagators, Riccati equation and differential Galois theory*, J. Phys. A: Math. Theor., (2013) **46** 455203

[18] J. A. Charris, B. Aldana & P. B. Acosta-Humánez, *Algebra. Fundamentos, Grupos, Anillos, Cuerpos y Teoría de Galois*, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 2013.

[19] C. J. Christopher, J. Llibre, C. Pantazi and X. Zhang, *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems*, J. Physics A: Gen. Math. **35** (2002), 2457–2476.

[20] T. Kimura, *On Riemann's Equations which are Solvable by Quadratures*, Funkcialaj Ekvacioj **12** (1969), 269–281.

[21] J. Kovacic, *An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations*, J. Symbolic Computation, **2**, (1986), 3–43.

[22] J. Martinet & J.P. Ramis, *Thorie de Galois differentielle et resommation*, Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier, Ed. Academic Press, London, 1989, 117–214.

[23] J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Birkhäuser, Basel 1999.

[24] Ch. Pantazi,*Inverse problems of the Darboux Theory of integrability for planar polynomial differential systems*, PhD, 2004.

[25] M. Van der Put & M. Singer, *Galois Theory in Linear Differential Equations*, Springer Verlag, New York, (2003).

[26] M.F. Singer, *An Outline of Differential Galois Theory*, in Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier, ed., Academic Press, 1989, 3–58